

Математика

Алгебра · Функции · Анализ данных

7

класс

Часть 3

Учебник для средней школы



УДК 373:51
ББК 22.1я721
П 29

Ассоциация «Школа 2000...»

Центр системно-деятельностной педагогики «Школа 2000...» АПК и ППРО РФ
Институт системно-деятельностной педагогики



**Программа математического развития
для дошкольников, начальной и средней школы**

«УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»

Научный руководитель

доктор педагогических наук **Л. Г. Петерсон**



Петерсон Л. Г., Абларов Д. Л., Чуткова Е. В.
П 29 Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. Учебник для 7 класса. Часть 3 /
Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абларов, Е. В. Чуткова. — М.: Издательство «Ювента», 2011. —
216 с.: ил.

ISBN 978-5-85429-513-0

Учебник ориентирован на развитие мышления, интереса к математике и творческих способностей учащихся, формирование ключевых деятельностных компетенций и готовности к саморазвитию.

Содержит большое количество разноуровневых заданий, позволяющих сформировать прочную систему математических знаний, соответствующих современным требованиям ГИА, ЕГЭ и дающих возможность качественной подготовки учащихся к математическим конкурсам и олимпиадам (на уроках и во внеурочной деятельности).

Реализует дидактическую систему деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон («Школа 2000...»). Является непосредственным продолжением непрерывного курса математики для дошкольников, начальной школы и 5—6 классов средней школы программы «Учусь учиться» (Премия Президента РФ в области образования за 2002 год).

Апробация учебника проведена в 2009/2010 учебном году. Учебник рекомендован Ученым советом Академии повышения квалификации и профессиональной переподготовки работников образования для использования во всех типах школ и для индивидуальной работы с учащимися.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

Курсовую подготовку учителей

к реализации деятельностного метода обучения осуществляют

Центр системно-деятельностной педагогики «Школа 2000...» АПК и ППРО РФ,

Институт системно-деятельностной педагогики

125212 Москва, Головинское шоссе, д. 8, корп. 2

Тел./факс: (495) 797-89-77, 452-22-33

Е-mail: info@sch2000.ru Интернет: www.sch2000.ru

ISBN 978-5-85429-513-0

© Издательство «Ювента», 2011

© Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абларов, Е. В. Чуткова, 2011

Л. Г. Петерсон, Д. Л. Абраров, Е. В. Чуткова

МАТЕМАТИКА

***АЛГЕБРА. ФУНКЦИИ.
АНАЛИЗ ДАННЫХ***

*Учебник для 7 класса
Часть 3*

**ЮВЕНТА
2011**

*Чтобы учебником было удобно пользоваться,
в нем введены следующие обозначения:*



– задачи по новой теме для работы в классе,



– задачи для домашней работы,



– повторение ранее пройденного,



– задачи на смекалку,



– задания базового уровня,



– более сложные задания по новым темам и темам повторения,



– задания, требующие умения находить нестандартные способы решения;



– завершение доказательства теоремы,



– материал для тех, кому интересно.

Глава 5

Введение в теорию функций

§ 1. Понятие функции и ее практическое применение

1. Функциональная зависимость между величинами



Понятие функции такое же основное и первоначальное, как понятие множества.

Феликс Хаусдорф (1868–1942),
немецкий математик

В обычной жизни мы постоянно сталкиваемся с разнообразными величинами: температурой, стоимостью, массой, количеством предметов, длиной, площадью, объемом и т. д. При этом, рассматривая некоторую конкретную ситуацию, мы можем обнаружить, что одни величины меняются, а другие остаются неизменными.

Мы уже знаем, что величина, которая может принимать различные числовые значения, называется **переменной величиной**. Так, например, если вы решили проехать на автобусе несколько остановок, то скорость автобуса, масса бензина в его баке и количество пассажиров будут переменными величинами, а количество его колес и окон в течение поездки не изменится, останется постоянным.

Среди переменных величин различают *независимые* и *зависимые* величины. Например, длина пути, проходимого вами со скоростью 50 м/мин, зависит от времени прогулки, которое вы выберете. При этом она однозначно определяется выбранным временем: за 5 мин вы пройдете 250 м, за 12 мин – 600 м, за 20 мин – 1000 м и т. д.

Похожая ситуация возникнет, если вы захотите купить несколько одинаковых тетрадей или распечатать несколько страниц текста на принтере. Во всех этих примерах мы можем точно и однозначно находить конкретные значения переменных величин с помощью изученных нами формул – в данном случае формул пути, стоимости, работы.

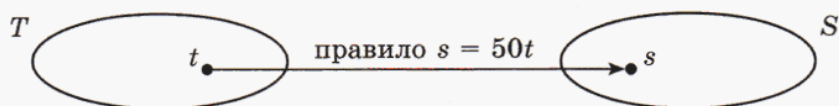
Зависимости между величинами, которые позволяют **однозначно** определять значение искомой величины, занимают среди всех других зависимостей особое место, так как помогают, например, осуществлять планирование, давать прогноз поведения различных величин в тех или иных условиях. Ведь даже в быту нам важно уметь рассчитать стоимость покупки или время, необходимое на ту или иную работу. Что же касается современного производства, то именно точность прогнозирования во многом определяет его результативность и конкурентоспособность.

В связи с особой значимостью таких зависимостей возникает необходимость изучать их отдельно от всех остальных. Для того чтобы выделить их среди всех других зависимостей, их назвали **функциональными зависимостями**, или **функциями**.

Прежде чем дать определение функции, вспомним предыдущий пример. Как мы определяли длину пути s м, пройденного за данное время t мин со скоростью 50 м/мин? Мы брали некоторое конкретное значение t мин (5 мин, 12 мин, 20 мин и т. д.), затем, пользуясь правилом $s = 50t$, умножали t мин на 50 м/мин и получали искомое значение s м (250 м, 600 м, 1000 м и т. д.).

Возможные значения переменной t в мин образуют некоторое множество T . При этом t не может принимать любые значения. Так, например, прогулка не может длиться 1 000 000 мин или (-24) мин. Если же она длилась, например, 30 мин, то множество T можно задать следующим образом: $T = \{t \in \mathbb{Q}: 0 \leq t \leq 30\}$. Переменная s в метрах при этом принимает значения из некоторого множества S : $S = \{s \in \mathbb{Q}: 0 \leq s \leq 1500\}$.

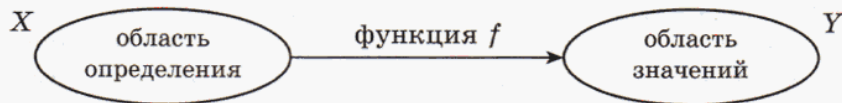
Данную зависимость можно схематически представить следующим образом:



где, согласно правилу $s = 50t$, каждому элементу t из множества T ставится в соответствие *единственный* элемент s из множества S .

Таким образом, мы приходим к следующему определению понятия функции, где независимая переменная обозначается буквой x , зависимая – буквой y , а правило соответствия – буквой f .

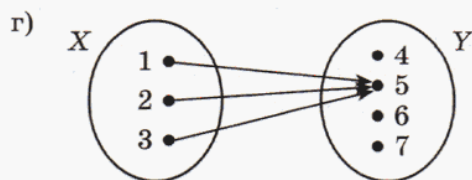
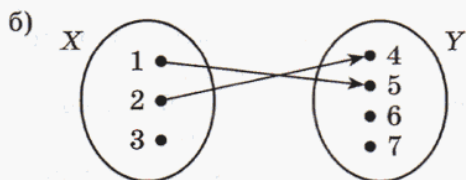
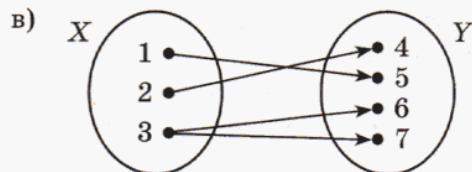
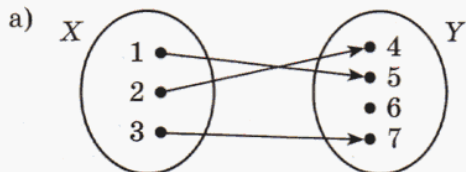
Определение. Функцией называется правило f , по которому *каждому* элементу x из некоторого множества X ставится в соответствие *единственный* элемент y из множества Y . Множество X при этом называется областью определения, а множество Y – областью значений данной функции.



Итак, отличительной особенностью функциональной зависимости (функции) является то, что для каждого элемента из ее области определения 1) *существует* и 2) *единственный* соответствующий элемент из области ее значений. Если хотя бы одно из этих двух требований не выполняется, то зависимость не является функциональной.

Разберемся в этом на конкретных примерах.

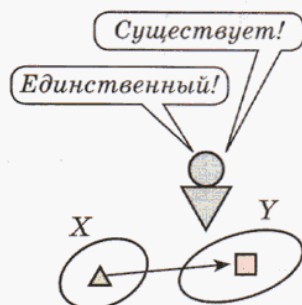
Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{4, 5, 6, 7\}$ и зависимость между ними задается следующими схемами, описывающими, какой элемент множества Y соответствует тому или иному элементу множества X .



Исходя из определения понятия функции, мы можем заключить, что зависимости, заданные схемами a и $г$, являются функциональными, а схемами $б$ и $в$ – нет. Действительно, в случаях a и $г$ для каждого элемента из множества X *существует и единственный* соответствующий элемент из множества Y . В случае же $б$ числу 3 из множества X не сопоставлено ни одного элемента из множества Y (то есть нарушено требование *существования* соответствующего элемента), а в случае $в$ числу 3 соответствуют сразу два элемента, 6 и 7, из множества Y (то есть нарушено требование *единственности* соответствующего элемента).

Таким образом, для того, чтобы определить, является ли данная зависимость функцией, надо:

1. Указать множество X , являющееся областью определения.
2. Указать множество Y , являющееся областью значений.
3. Убедиться в том, что каждому элементу из области определения X поставлен в соответствие некоторый элемент из области значений Y (*существование*).
4. Убедиться в том, что в области определения X нет элементов, которым поставлено в соответствие более одного элемента из области значений Y (*единственность*).



К

1

Используя данную формулу зависимости между p и q , вычислите значения p для данных q :

а) $p = 3q$, где $q = 1; 3; 5; 3$;

б) $p = \frac{1}{2}q$, где $q = 1; 4; 0; -4$;

в) $p = \frac{4}{q}$, где $q = 1; -1; 2; -2$;

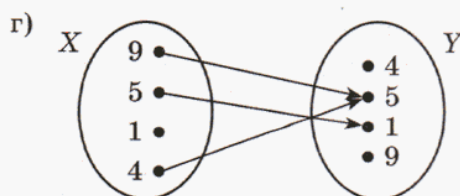
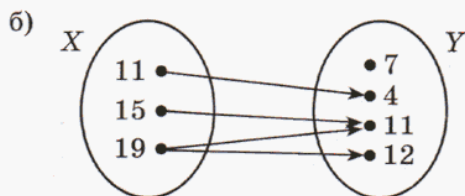
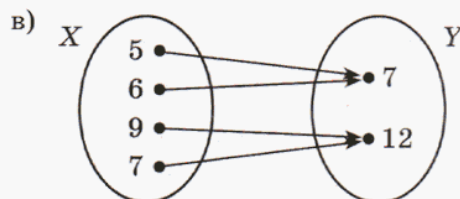
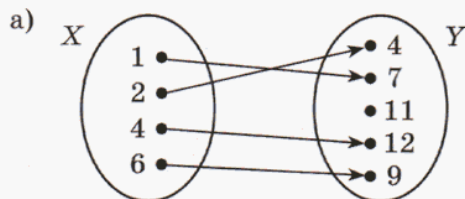
г) $p = 5q^2$, где $q = 1; -1; 0; 2$;

д) $p = 3 + q$, где $q = 0; -3; 1; 3$;

е) $p = 7$, где $q = 1; -5; 7; -8$.

2

1) Зависимости между множествами X и Y заданы приведенными ниже схемами. Определите, какие из указанных зависимостей позволяют для *каждого* элемента из множества X находить *единственный* соответствующий элемент из множества Y . Обоснуйте свой ответ.



2) Как вы думаете, где используются такие зависимости? Почему важно выделять и специально изучать подобные зависимости? Сравните свой вывод с выводом на стр. 3 учебника.

3) Предложите свое название для зависимостей данного вида и дайте свой вариант их определения. Сравните данные вами название и определение с теми, которые приведены на стр. 3–4 учебника.

4) Исходя из определения понятия функции, постройте алгоритм, позволяющий установить, является ли данная зависимость функцией, или нет. Сравните его с алгоритмом, приведенным на стр. 5 учебника.

3

Зависимость y от x задана таблицей. Найдите ее область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функциональной.

а)

x	-2	-1	0	1	3
y	1	2	3	4	5

в)

x	0	1	2	3	5
y	-3	-1	-3	-1	-3

б)

x	5	-3	5	4	3
y	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

г)

x	3	5	7	9	11
y	4	4	5	5	6

4

Задайте зависимость объема куба V от длины его ребра a . Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $a = 3$ см; б) $a = 2$ м; в) $a = \frac{1}{2}$ дм; г) $a = 10$ мм; д) $a = \frac{1}{4}$ м.

5

Задайте зависимость пройденного с постоянной скоростью 5 км/ч пути S (в км) от времени движения t (в часах). Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $t = 3$ ч; б) $t = 15$ мин; в) $t = 1$ ч 20 мин; г) $t = 3$ ч 30 мин.

6

Зависимость задали следующим образом: каждому целому числу поставили в соответствие его остаток при делении на целое число a . Определите, является ли данная зависимость функциональной. Укажите область определения и область значений этой зависимости для указанных значений a .

а) $a = 5$; б) $a = 8$; в) $a = 11$; г) $a = -3$; д) $a = -5$.

7

а) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 + 6x + 12$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно 3?

б) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 - 2$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно -6?





8

Запишите высказывания на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите истинные высказывания, а для ложных – постройте их отрицания.

- Некоторые целые числа при делении на 6 дают остаток (-1) .
- Все целые числа при делении на 17 дают остаток 9.
- Каждое целое число делится само на себя.
- Можно найти такое целое число, делителем которого является 7.
- Все целые числа, делящиеся на 5, составные.
- Есть четные числа, кратные 7 и 5.
- Все целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 2, кратны 5.
- Существуют целые числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 7 дают остаток 5.

9

- В доме 190 квартир, в которых живут 572 человека. Докажите, что в этом доме есть хотя бы одна квартира, в которой живут не менее 4 человек.
- Семь покупателей купили 20 пирожных. Докажите, что хотя бы два покупателя купили одинаковое количество пирожных.

10

Решите уравнение:

- $5 - (3,25x - 4,6) = 5x - (5 - 0,4x) + 0,75x - (2x - 9) + 0,6x$;
- $5,7y + (7,2 - 0,9y) = 34,15 + 3,45y - (18,2 - 6,3y) - 3,8$;
- $1,2a - 5,3 = 0,5a - (0,75a - (5,4 - 1,85a)) - 8,7a + 7,3$;
- $7,1 - (6,9b - 0,9) - 1,4 - (5,7b + 3,9) = 34,5 + 3,4b - 7,8$.



11

Постройте математическую модель и решите задачу:

- Сумма двух натуральных чисел равна 36. Первое число при делении на 11 дает остаток 6, а второе число при делении на 11 дает остаток 8. Найдите эти числа.
- Величина первого угла треугольника на 10° больше величины второго и на 10° меньше величины третьего. Найдите величину большего угла этого треугольника.
- Длина ломаной $ABCD$ равна 13,5 см. Известно, что AB равно $\frac{1}{6}$ расстояния между ее началом и концом, BC на 5,1 см больше AB , а CD на 3,6 см меньше BC . Найдите длину звена AB этой ломаной.

12

Упростите выражение:

- $\left(\frac{4}{5}abc^2 - \frac{5}{8}ab^2c + 5abc\right) - \left(\frac{14}{25}abc^2 - \frac{13}{32}ab^2c + 3abc\right)$;
- $\left(\frac{2}{7}xy^2 - \frac{4}{15}x^2y + \frac{5}{12}x^2yz\right) - \left(\frac{3}{14}xy^2 - \frac{2}{5}x^2y + \frac{1}{4}x^2yz\right)$;
- $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{5}c\right) + \left(\frac{3}{4}a - \frac{2}{9}b - \frac{3}{25}c\right) - \left(\frac{5}{8}a - \frac{4}{27}b + \frac{9}{125}c\right)$;
- $\left(3\frac{1}{6}mn - 2\frac{1}{3}m\right) - \left(\frac{2}{9}mn - 5\frac{1}{15}m\right) - \left(3\frac{5}{18}mn + 3\frac{8}{45}m\right)$.



13 Не вычисляя частного, определите, делится ли число a на b :

- а) $a = -56\ 353$, $b = -3$; г) $a = -397\ 542$, $b = 9$; ж) $a = 415\ 644$, $b = -8$;
 б) $a = -516\ 972$, $b = 3$; д) $a = -914\ 679$, $b = -9$; з) $a = 843\ 512$, $b = -12$;
 в) $a = 2\ 578\ 312$, $b = -6$; е) $a = -921\ 432$, $b = -4$; и) $a = -965\ 115$, $b = -15$.

14 Какое выражение нужно подставить вместо A , чтобы равенство превратилось в тождество?

- а) $3^{17} \cdot 3^{54} = A$; г) $A \cdot (9^8)^5 = 9^{51}$;
 б) $A : 8^{23} = 8^{35}$; д) $(7^6)^9 : A = 7^{48}$;
 в) $5^{34} \cdot A = 5^{51}$; е) $A : (4^8)^9 = 4^5$.

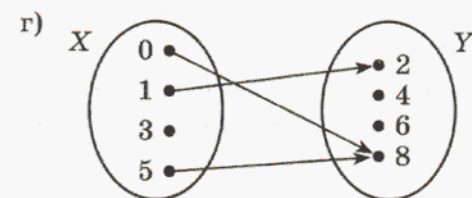
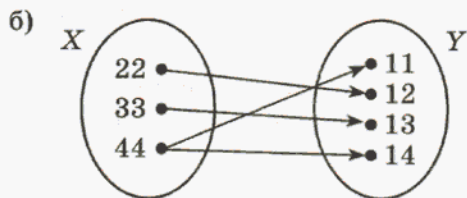
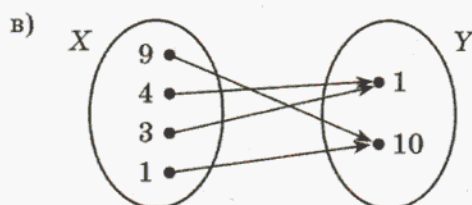
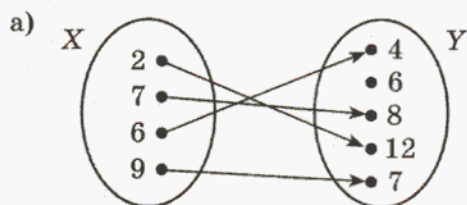


15 Докажите, что:

- а) При любых натуральных a и b число 7 не может быть корнем уравнения $2ax^2 + bx + 4 = 0$.
 б) Число 12 не может быть корнем уравнения $ax^3 + 3bx^2 + 4x + 7 = 0$ при любых натуральных a и b .

Д

16 Зависимости между множествами X и Y заданы приведенными ниже схемами. Определите, какие из указанных зависимостей являются функциональными, и обоснуйте свой ответ.



17 Зависимость y от x задана таблицей. Найдите ее область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функцией.

а)

x	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1

г)

x	1	3	5	7	9
y	-2	-2	-2	-2	-2

б)

x	1	2	1	2	1
y	2	4	6	8	10

д)

x	1	3	5	7	9
y	-2	-2	-2	-2	-2

в)

x	1	3	5	8	9
y	3	3	5	5	0

е)

x	2	4	0	4	2
y	0	2	4	6	8

18 Задайте зависимость выполненной работы A (в ед.) от времени работы t (в мин), если известно, что производительность равна 20 ед. в мин. Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $t = 10$ мин; б) $t = 2$ ч; в) $t = 90$ с; г) $t = 2$ сут.; д) $t = 1$ ч 20 мин.

19 Задайте зависимость стоимости C (в р.) купленных по цене 30 р. за килограмм яблок от массы покупки p (в кг). Укажите область определения и область значений для этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $p = 5$ кг; б) $p = 500$ г; в) $p = 1$ кг 300 г; г) $p = 2$ кг 800 г.

20 Функцию задали следующим образом: каждому рациональному числу q поставили в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее этого числа. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной.

а) $q = 3,2$; б) $q = 7,4$; в) $q = 5\frac{1}{2}$; г) $q = -3,3$; д) $q = -5,6$.

21 а) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 + 8x + 21$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно 5?

б) Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу: $y = x^2 - 3$. Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно -5 ?

22 а) В пончиковой компании Антона и Ксюши 76 магазинов, торгующих пончиками, в которых работают 305 человек. Докажите, что среди этих магазинов есть хотя бы один магазин, в котором работает не менее 5 человек.

б) Восемь экспедиторов пончиковой компании доставили 27 заказов. Докажите, что хотя бы два экспедитора доставили одинаковое количество заказов.

23 Решите уравнение:

а) $6,7 - (6,8x - 0,6) = 6,9x - (1,9x - 5,3) + 0,8x - (2x + 9) + 0,4x$;

б) $4,3y + (6,2 - 1,5y) = 2,3 + 4,4y - (7,2 + 2,3y) - 2,9$.

24 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма двух натуральных чисел равна 55. Первое число при делении на 14 дает остаток 2, а второе число при делении на 14 дает остаток 11. Найдите эти числа.

б) Величина первого угла треугольника на 30° больше второго и на 60° меньше третьего. Найдите величину большего угла этого треугольника.

25 Упростите выражение:

а) $\left(\frac{1}{7}klm^2 - \frac{4}{3}kl^2m + 7klm\right) - \left(\frac{3}{21}klm^2 - \frac{4}{9}kl^2m + 5klm\right);$

б) $\left(\frac{1}{7}p + \frac{1}{11}r + \frac{1}{4}q\right) - \left(\frac{2}{7}p - \frac{2}{11}r - \frac{3}{4}q\right) - \left(-\frac{5}{7}p + \frac{4}{11}r + \frac{9}{4}q\right).$

26 Не вычисляя частного, определите, делится ли число a на b :

а) $a = -78\ 514$, $b = -3$; д) $a = -357\ 615$, $b = -15$;

б) $a = -854\ 328$, $b = 4$; д) $a = 743\ 216$, $b = -8$;

в) $a = -516\ 915$, $b = 9$; е) $a = 493\ 532$, $b = -12$.

27 Какое выражение нужно подставить вместо A , чтобы равенство превратилось в тождество?

а) $2^{36} \cdot 2^{43} = A$;

в) $4^{28} \cdot A = 4^{35}$;

д) $(5^2)^6 : A = 5^9$;

б) $A : 3^{76} = 3^{29}$;

г) $A \cdot (7^3)^4 = 7^{39}$;

е) $A : (6^7)^{11} = 6^{13}$.

28 Докажите, что:

а) При любых натуральных a и b число 11 не может быть корнем уравнения $ax^2 + 5bx - 9 = 0$.

б) Число 4 не может быть корнем уравнения $ax^3 + 3bx^2 + 2x + 7 = 0$ при любых натуральных a и b .

в) Ни один из корней уравнения $2ax^3 + 6bx^2 + 15 = 0$ не делится на 6 при любых натуральных a и b .

29 Найдите три числа, дающих при делении на B такие же остатки, как A :

$$A = \frac{\left(9\frac{1}{4} - 7\frac{2}{5}\right) \cdot 25 - 15}{\left(3\frac{1}{8} + 4\frac{3}{20} - 1\frac{5}{48} - 5\frac{2}{5}\right) : 3\frac{1}{12}} + \frac{60 - 40 \cdot \frac{1}{10}}{7 + 1 : \frac{3}{7}};$$

$$B = \frac{\left[\left(\frac{23}{36} + \frac{31}{63}\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{21}\right)\right] \cdot 48 : \left(\frac{3}{5} : \frac{7}{8}\right)}{\left(\frac{19}{26} + \frac{14}{39} - \frac{1}{6}\right) \cdot 54\frac{1}{6} : \left(8\frac{4}{7} : \frac{12}{35}\right)}.$$



30* В классе 27 учеников. Может ли каждый из них дружить ровно с девятью другими учениками этого класса?

31* Четыре пары супругов играли в боулинг. Диана выиграла три очка, Лиза – два, Ника – четыре, а Анжела – одно. Семен выиграл столько же очков, сколько и его жена, Петр – вдвое больше своей жены, Николай – в три раза больше своей жены, а Константин – в 4 раза больше своей жены. Всего было выиграно 32 очка. Как зовут жену Николая?

32* Двое мальчиков катались на лодке. К берегу подошел отряд солдат. В лодке могут переправиться через реку либо двое мальчиков, либо один солдат. Смогут ли мальчики помочь солдатам переправиться через реку?

2. Способы задания функции



Числа и функции – не произвольные продукты нашего духа, они существуют вне нас с тем же характером необходимости, как вещи объективной реальности...

Шарль Эрмит (1822–1901),
французский математик

Функция – одно из важнейших понятий математики, и нам важно теперь научиться обозначать функции, а также выяснить, каким образом можно задать функцию.

Как мы уже знаем, для **обозначения функций** пользуются буквами, чаще всего x , y и f . Буквой x обозначают произвольный элемент области определения X , буквой y – соответствующий ему элемент области значений Y , а буквой f – правило, устанавливающее соответствие между x и y .

Поскольку значение y зависит от x , а x мы выбираем произвольно из области определения, то x – это *независимая переменная*, или, как говорят иначе, *аргумент функции*, а y – *зависимая переменная*.

Все три буквы, x , y и f , объединяют единой записью

$$y = f(x),$$

которая читается как «игрек равно эф от икс».

Разумеется, вместо букв x , y и f могут быть использованы любые другие буквы. Например, запись $s = g(t)$ означает, что s является функцией от t и правило зависимости s от t обозначено буквой g .

Функция определена (или *задана*), если нам известно правило соответствия и множество значений переменной, к которому это правило надо применять.

Таким образом, для того, чтобы **задать функцию**, необходимо:

1. Указать ее область определения X .
2. Указать правило f , по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется единственное значение функции y .

Какими же способами может быть задана функция?

Задание функции с помощью словесного описания

Зададим функцию f следующим образом: «всем неотрицательным рациональным числам поставим в соответствие число 1, а всем отрицательным – число (-1) ».

Областью определения этой функции является множество всех рациональных чисел. И каждому из них указанное правило сопоставляет *единственное* число: любому положительному числу и нулю – число 1, а любому отрицательному числу – число (-1) . Например:

$$f(4) = 1 \qquad f(-5) = -1 \qquad f(0) = 1.$$

Таким образом, функция полностью определена. Вместе с тем данный способ задания функции является достаточно громоздким, трудным для восприятия и осознания, а главное – неудобным для последующего исследования функции и работы с ней.

Поэтому возникает необходимость в других способах задания функции.

Табличный способ задания функции

Можно задать функцию, указав все значения независимой переменной и для каждого из них – соответствующее значение зависимой переменной. Такой способ задания функции называется *табличным*.

Пусть областью определения функции f является множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и каждому значению $x \in X$ сопоставлено значение y , указанное в соответствующем столбце таблицы:

x	1	2	3	4	5
y	-2	3	4	-2	5

Таким образом, для каждого значения $x \in X$ *существует и единственное* соответствующее значение y . Например, $f(2) = 3$, а $f(4) = -2$.

Табличный способ задания функции удобен тем, что соответствующие значения x и y можно определить сразу, без дополнительных усилий. Однако при достаточно большом количестве элементов множества X данный способ становится слишком громоздким. А если множество X имеет бесконечное число элементов, то табличный способ не даст полной информации о характере исследуемой зависимости.

Аналитический способ задания функции (с помощью формулы)

Функция $y = \frac{5}{x^2}$ задана формулой, показывающей, как для каждого значения x из области ее определения вычислить соответствующее значение y .

Если область определения явно не указана, то мы будем считать, что функция задана для всех допустимых значений x , то есть тех значений x , при которых указанная формула имеет смысл.

Так как выражение $\frac{5}{x^2}$ имеет смысл для всех x , не равных нулю, то областью определения нашей функции является множество всех известных нам чисел, кроме нуля. И для каждого x из области ее определения *существует и единственное* соответствующее значение y , которое мы можем вычислить по формуле, задающей функцию. Например:

$$f(3) = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9} \quad f(-0,5) = \frac{5}{(-0,5)^2} = \frac{5}{0,25} = \frac{5 \cdot 4}{1} = 20.$$

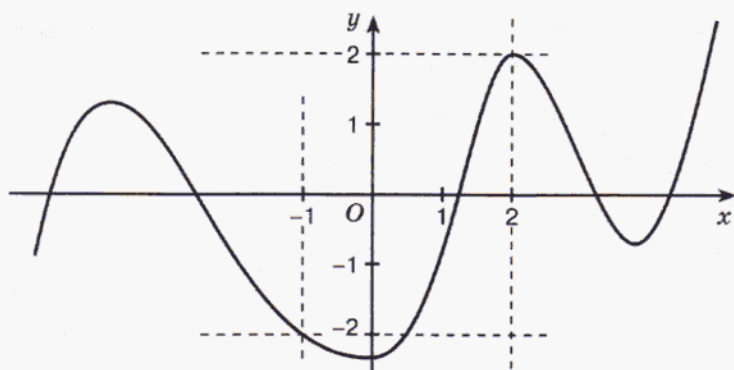
Аналитический способ задания функций очень удобен. Однако зависимость между величинами не всегда может быть задана формулой. В этом случае можно задать функцию графически.

Графический способ задания функции

На практике функция изначально может задаваться некоторым графиком. Например, метеорологические приборы автоматически регистрируют значение температуры в каждый заданный момент времени суток. Результатом их работы являются графики изменения температуры в зависимости от времени.

Графический способ задания функции основан на следующем. На координатной плоскости Oxy для каждого значения x из области определения функции строится точка, координата которой на оси Ox (*абсцисса*) равна выбранному значению x , а координата на оси Oy (*ордината*) равна соответствующему значению функции.

Построенные таким образом точки плоскости образуют множество точек, называемое **графиком функции**.



Используя график функции, найти ее значение в некоторой точке x можно следующим образом:

1. Найти абсциссу, равную x .
2. Провести через нее прямую, параллельную оси Oy .
3. Найти точку пересечения этой прямой с графиком функции.
4. Провести через найденную точку пересечения прямую, параллельную Ox .
5. Определить ординату этой точки пересечения.

Найденная ордината будет равна значению функции в точке x . Например, на графике, представленном выше, $f(2) = 2$, а $f(-1) = -2$.

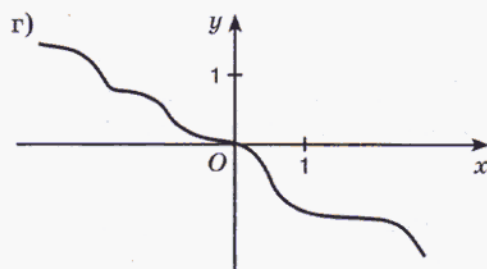
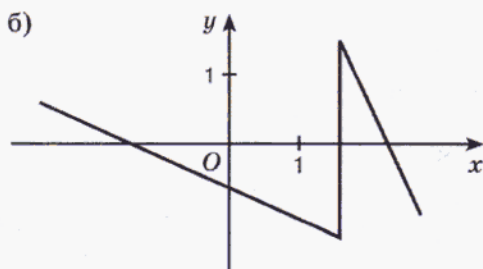
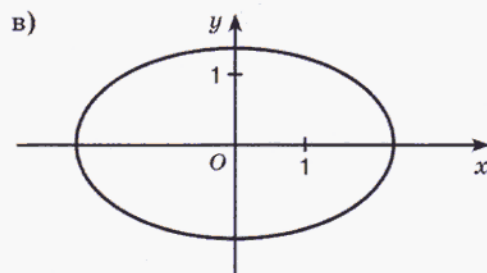
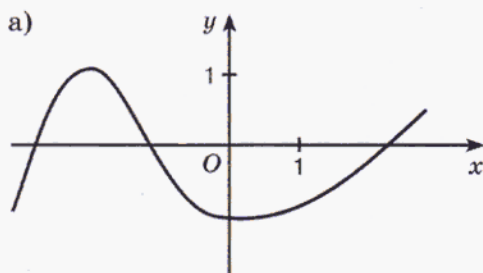
К

33 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

- а) $x = 2$; б) $x = -1,5$; в) $y = 4$; г) $y = -3,5$; д) $x = 0$; е) $y = 0$.

34

Зависимости заданы графически. Исходя из определения понятия функции, установите, какие из этих зависимостей являются функциональными, а какие нет.



35

1) Прочитайте запись: $y = f(x)$. Что означают в этой записи буквы x , y , f ? Запишите несколько других обозначений функции и прочитайте свои записи.

2) Что значит задать (определить) функцию? Что необходимо сделать, чтобы задать функцию? Сравните свой вывод с выводом на стр. 11 учебника.

36

1) Определите, какие из приведенных ниже зависимостей являются функциями.

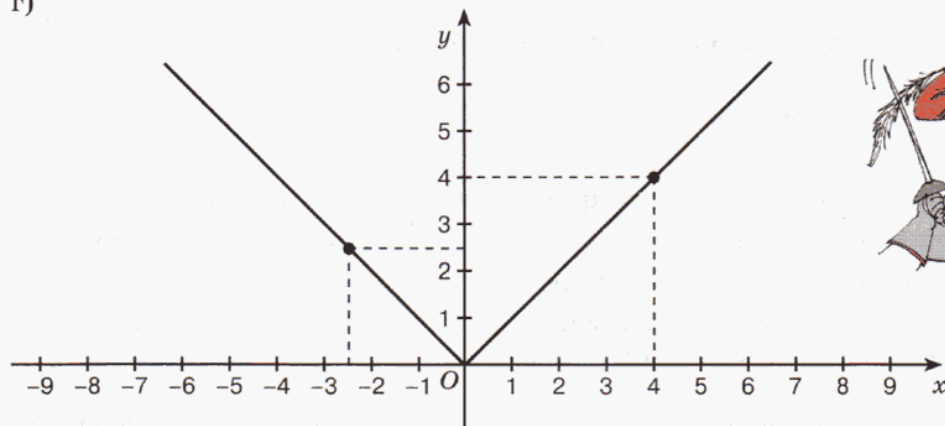
а) Каждому рациональному числу ставится в соответствие его модуль.

б) $y = |x|$, $x \in \mathbb{Q}$.

в)

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6

г)



Как для каждой из указанных функций найти $f(4)$, $f(-2,5)$, $f(1\frac{3}{4})$?

Что вы замечаете?

2) Какие способы задания функции были использованы? В чем преимущества и недостатки каждого из них? Сравните свои выводы с выводами на стр. 11–13 учебника.

37

1) Функции заданы словесным описанием. Найдите область определения и область значений каждой функции. Определите их значения в точках x_1 , x_2 и x_3 .

а) Всем четным числам поставлено в соответствие число 3, а всем нечетным числам – число (-3) .

$$x_1 = 24; x_2 = 17; x_3 = 128.$$

б) Всем целым числам поставлено в соответствие число 1, а всем нецелым числам – число (-1) .

$$x_1 = -7; x_2 = 15,5; x_3 = -2,1.$$

в) Всем правильным дробям поставлено в соответствие число 2, а всем неправильным дробям – число 4.

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{8}{7}; x_3 = \frac{4}{5}.$$

2) Можно ли задать каждую из трех данных функций с помощью формулы, таблицы и графика?

38 Функция задана формулой. Найдите ее область определения.

а) $y = x^2$; в) $y = \frac{3}{x-9}$; д) $y = \frac{14}{x^2}$; ж) $y = \frac{9x+7}{(2x-5)(4x+9)}$;
 б) $y = 2x+3$; г) $y = \frac{7x+5}{3}$; е) $y = \frac{2x}{3x-8}$; з) $y = \frac{11(x-5)}{x^3(2x+6)}$.

39 Функция задана формулой. Найдите ее значение в точках x_1 , x_2 и x_3 .

а) $y = 7x - 5$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; в) $y = 3x^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -0,5$;
 б) $y = \frac{4}{2x-7}$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 4$; г) $y = \frac{4x-3}{5}$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0,75$; $x_3 = -2$.

40 Функция задана формулой: 1) $y = 2x$; 2) $y = -x$; 3) $y = 2 - x$; 4) $y = -|x|$.

Задайте данную функцию с помощью:

а) словесного описания;

б) таблицы значений от -3 до 3 с шагом 1 .

(Шагом называют разность между двумя соседними значениями аргумента.)

41 Функция задана с помощью таблицы. Задайте ее словесным описанием и графически.

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	3	6

в)

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	2	1	0,5	0	-0,5	-1	-2

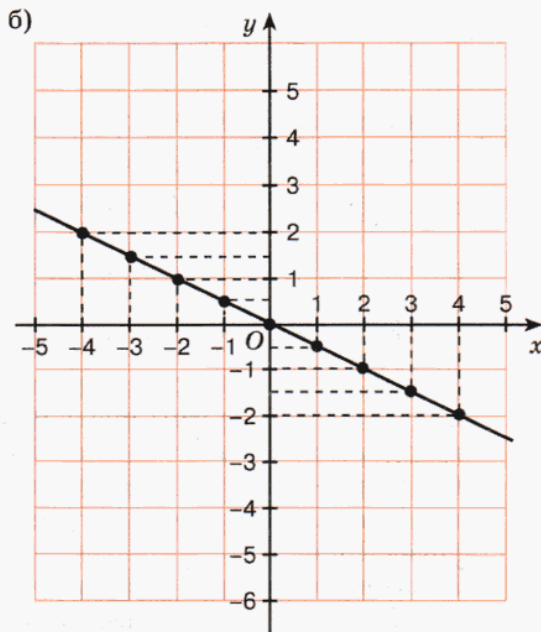
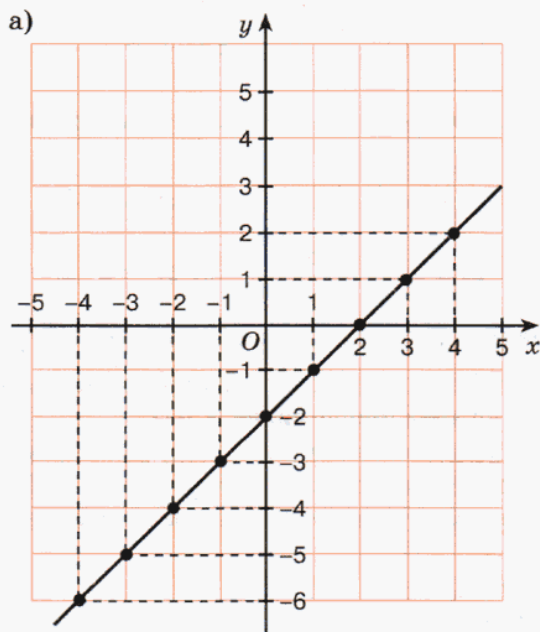
б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3

г)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

42 Функция задана с помощью графика. Задайте эту функцию: а) таблицей значений от -4 до 4 с шагом, равным 1 ; б) словесным описанием; в) формулой.



43 Составьте таблицу значений функции:

- а) $y = 3x$ для x от -4 до 4 с шагом 1 ; в) $y = 3x + 5$ для x от -2 до 2 с шагом $0,5$;
 б) $y = -4x$ для x от -6 до 6 с шагом 2 ; г) $y = 4 - 3x$ для x от $-4,5$ до $4,5$ с шагом $1,5$.
 Используя таблицы, постройте графики этих функций для указанных значений x .

44 Функция задана с помощью таблицы. Задайте эту функцию словесным описанием и графически.

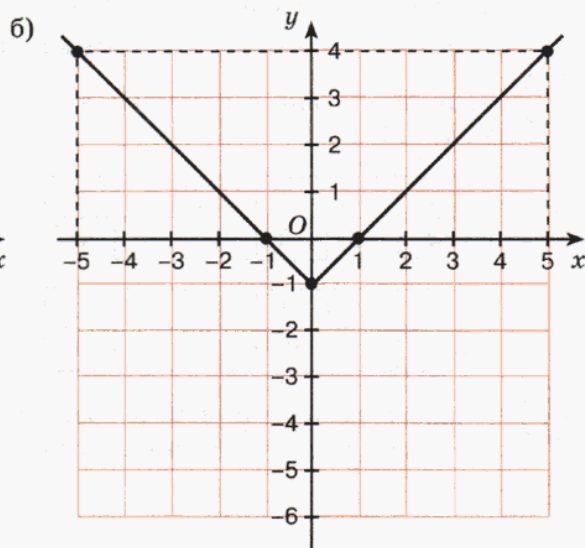
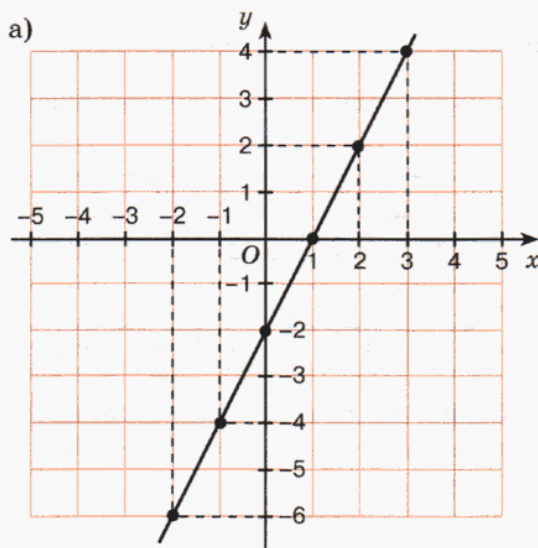
а)

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
y	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9

б)

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
y	-27	-8	-1	-0,125	0	0,125	1	8	27

45 Задайте функцию аналитически, используя ее график.



46 Функция задана формулой. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно y_1 , y_2 и y_3 .

а) $y = 5x - 6$; $y_1 = 0$; $y_2 = 5$; $y_3 = -2$; в) $y = \frac{7}{x}$; $y_1 = 1$; $y_2 = -1$; $y_3 = 2$;

б) $y = \frac{11}{3x - 8}$; $y_1 = 1$; $y_2 = -2$; $y_3 = 3$; г) $y = \frac{9x - 5}{2}$; $y_1 = 0$; $y_2 = 2$; $y_3 = -2,5$.



47 Запишите следующие выражения на математическом языке:

- а) произведение квадрата суммы чисел 7 и a и разности квадратов чисел b и c ;
 б) частное куба суммы чисел 9 , x , y и суммы кубов чисел 3 и z ;
 в) удвоенная разность кубов чисел 6 и p , умноженная на куб суммы чисел 2 и q ;
 г) квадрат разности чисел r и s , деленный на разность кубов чисел t и k ;
 д) произведение неполного квадрата суммы чисел m и n и разности квадратов чисел a и b ;
 е) шестая степень суммы чисел 4 , m , n , k ;
 ж) сумма шестых степеней чисел x , y и z .

48 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{5}{511}$ и $\frac{7}{949}$;

б) $\frac{3}{1691}$ и $\frac{4}{2047}$;

в) $\frac{7}{2813}$ и $\frac{2}{3589}$.

49 Решите уравнение:

а) $(a + 7)^2 - 4 = 0$;

б) $(7b - 5)^2 - 64 = 0$;

в) $64(c + 5)^2 - 4c^2 = 0$.

50 Упростите выражение:

а) $3a^4 - (4a^3b - 7a^2b^2 - ab^3) - (2a^4 + 6ab^3 - a^3b - b^4) - (-3a^3b + 6a^2b^2 - 5ab^3)$;

б) $x^4 + 3x^3y - (6x^2z - 3rx + s) + 4x^4 - (6x^3y - 5x^2z + 3rx - 2s) + (-5x^4 + 6x^3y + 5x^2z - s)$;

в) $2a^2(a - b) + 3a(a - b)^2 - 5(a - b)^3 + c - (-4(a - b)^3 + 2a(a - b)^2 + a^2(a - b) + c)$;

г) $3x^2 + 4y^2 - (x + y)^2 - 2x(x + y) - 3y^2 + 4xy$.

51 Докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c :

а) $a = 200\ 000$, $b = 200\ 056$, $c = 8$; в) $a = 599\ 615$, $b = 600\ 000$, $c = 11$;

б) $a = 399\ 996$, $b = 400\ 009$, $c = 13$; г) $a = 900\ 312$, $b = 900\ 632$, $c = 32$.

52 а) Из Москвы и Владивостока, расстояние между которыми 9000 км, вылетели одновременно навстречу друг другу два самолета, Су-34 и Ил-96. Через 3 часа расстояние между ними было равно 1170 км. Найдите скорости, с которой летели оба эти самолета, если скорость Су-34 была в два раза больше скорости Ил-96.

б) Из Москвы в Самару вышел теплоход со скоростью 20 км/ч. Через 3 часа из Москвы в том же направлении вышел второй теплоход, который передвигался со скоростью 24 км/ч. Чему равно расстояние между Москвой и Самарой, если в Самару оба теплохода прибыли одновременно?

в) Праздничная колонна демонстрантов движется по улице со скоростью 3 км/ч. Водитель машины с телевизионными камерами, двигавшейся навстречу колонне со скоростью 15 км/ч, заметил, что путь от начала и до конца колонны занял у него 2 минуты. Определите длину праздничной колонны.

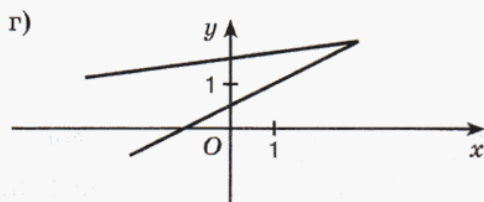
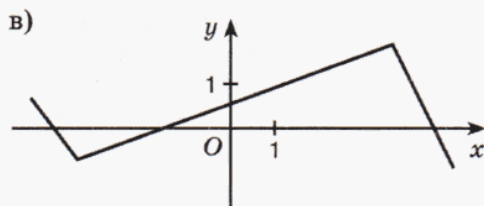
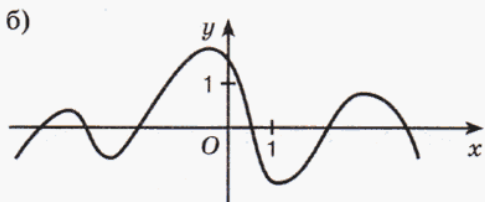
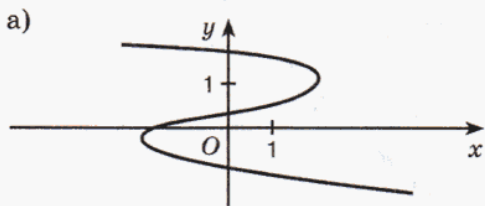
53 Докажите, что:

а) $a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a$ для любого целого числа a делится на 3;

б) $b^5 + 4b$ для любого целого числа b делится на 5.

2

54 Зависимости заданы графически. Определите, какие из них являются функциональными, а какие нет.



55 Функция $y = f(x)$ задана следующим образом: всем числам, кратным 3, поставлено в соответствие число 0; всем числам, дающим остаток 1 при делении на 3, поставлено в соответствие число 1, а всем остальным целым числам поставлено в соответствие число 2. Найдите область определения и область значений этой функции. Вычислите ее значения в точках 26, 70, -1, 12, -8.

56 Функция задана с помощью таблицы. Задайте ее графически.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2



57 Функция задана формулой: 1) $y = -2x$; 2) $y = |2x|$.

Задайте данную функцию с помощью:

- а) таблицы значений от -3 до 3 с шагом 1;
б) графика функции.

(Шагом называют разность между двумя соседними значениями аргумента.)

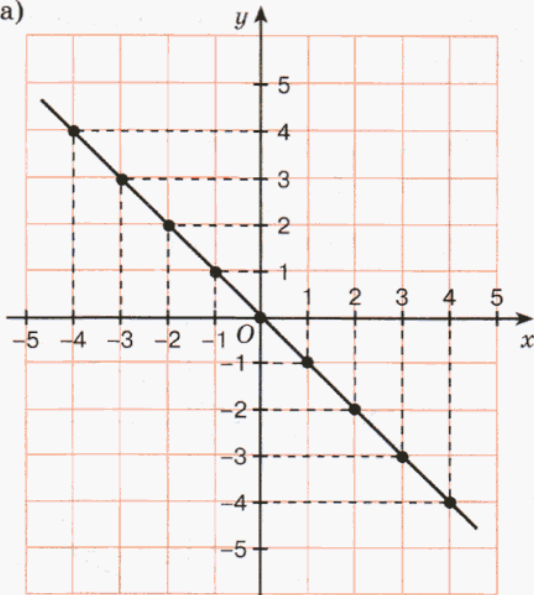
58 Функция задана формулой $\frac{7x-28}{4}$. Найдите ее значение в точках 0, 2, 4, -1, -3.

59 Составьте таблицу значений функции:

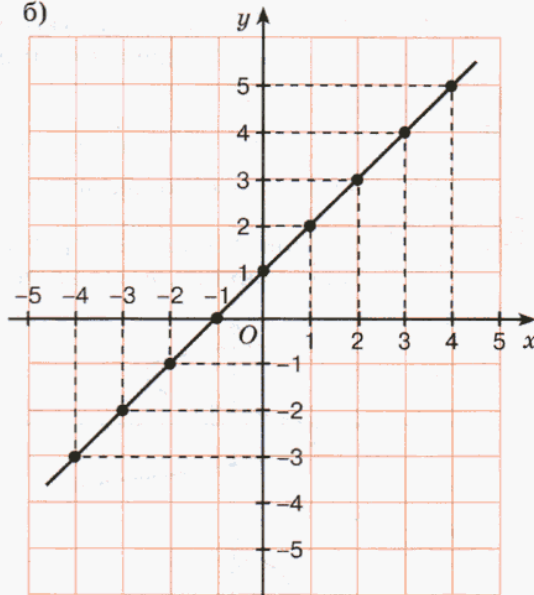
- а) $y = 5x$ для x от -2 до 2 с шагом 0,5; б) $y = -7x$ для x от -9 до 9 с шагом 3;
в) $y = 2x + 7$ для x от -3 до 3 с шагом 1; г) $y = 6 - x$ для x от -7,5 до 7,5 с шагом 2,5.

60 Функция задана с помощью графика. Задайте эту функцию таблицей значений от -4 до 4 (с шагом, равным 1) и формулой.

а)



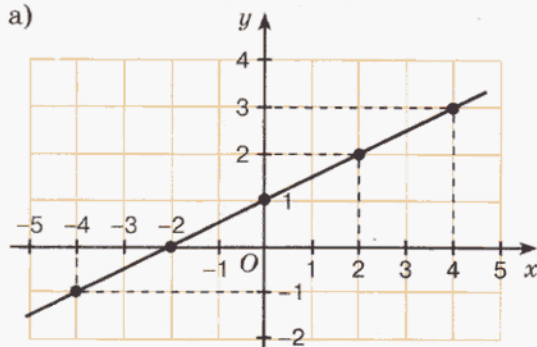
б)



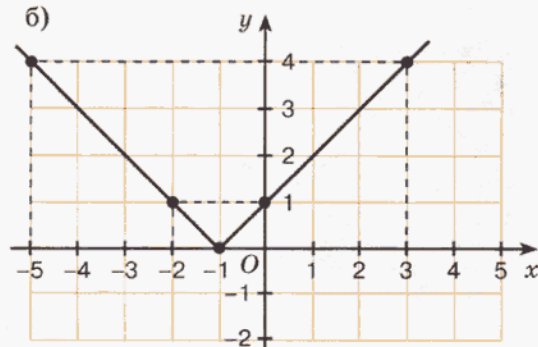
61 Функция задана формулой $\frac{17}{2x-3}$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 1, 3, -2.

62 Задайте функцию аналитически, используя ее график.

а)



б)



63 Приведите дроби к общему знаменателю:

а) $\frac{2}{589}$ и $\frac{4}{899}$;

б) $\frac{3}{287}$ и $\frac{5}{697}$;

в) $\frac{1}{559}$ и $\frac{2}{817}$.

64 Решите уравнение:

а) $(x - 7)^2 - 36 = 0$;

б) $(5y + 3)^2 - 81 = 0$;

в) $16(z - 3)^2 - 9z^2 = 0$.

65 Упростите выражение:

а) $x^4 - (4x^3y - 7x^2y^2 - xy^3) - (2y^4 + 6xy^3 - x^3y - y^4) - (-3x^3y + 6x^2y^2 - 5xy^3)$;

б) $5y^2(x + y) - 7y(x + y)^2 + 3(x + y)^3 + 2x^2y - (4(x + y)^3 - 8y(x + y)^2 + 4y^2(x + y))$.

66 Докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c .

а) $a = 54\,316$, $b = 54\,393$, $c = 11$;

б) $a = 154\,217$, $b = 154\,649$, $c = 18$.

67 а) Из двух филиалов пончиковой компании Антоны и Ксюши, расстояние между которыми равно 750 км, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Через 2 часа расстояние между ними было равно 450 км. Найти скорость, с которой ехали оба автомобиля, если скорость одного из них была в 1,5 раза больше скорости другого.

б) Когда Антон ехал на работу, то обратил внимание на то, что на встречной полосе образовалась пробка. Машины в пробке двигались со скоростью 5 км/ч. При этом Антон заметил, что путь от начала и до конца пробки занял у него 12 минут. Чему равна длина этой пробки, если Антон ехал со скоростью 60 км/ч?

68 Докажите, что:

а) $a^3 + 3a^2 + 2a$ для любого целого числа a делится на 3;

б) $b^4 + 2b^3 + b^2$ для любого целого числа b делится на 4.

69 Докажите, что числа A и B имеют одинаковые остатки при делении на 7.

$$A = \left[\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{225} \right) \cdot 9 + 0,16 \right] : \left(\frac{1}{3} - 0,3 \right); \quad B = (50 - 11,409 : 0,3) : \left(4,2 : 12 - 0,21 \cdot \frac{2}{3} \right).$$

C

70* Путешественник отправился из своего родного города A в самый удаленный от него город B . Из города B он отправился в самый удаленный от него город C и так далее. Докажите, что если C не совпадает с A , то путешественник, передвигаясь и далее таким способом, никогда не вернется домой.

3. Функциональная зависимость и кодирование информации*



*Математика – это непреложная основа наук
и плодотворный источник всяческой полезности
в человеческих делах...*

Исаак Барроу (1630–1677),
английский математик и физик

Как известно, кодирование информации необходимо для конфиденциальной передачи данных. Оно основано на том, что по определенному правилу меняется форма первоначального сообщения так, чтобы его смог прочитать только адресат, знающий правило, примененное при шифровке. Сегодня *криптография* (от др.-греч. *kryptos* – скрытый, *graphos* – писание) – наука о шифрах и их дешифровке – является основой информационной безопасности как отдельных компаний и корпораций, так и целых стран.

Фактически при кодировании информации задается некоторая функция, правило преобразования текста. Это правило называют **ключом шифра**. Например, каждой букве алфавита ставится в соответствие свой индивидуальный символ – цифра, буква, картинка, прочий знак. Данная функция преобразовывает исходное сообщение в зашифрованное.

Один из самых распространенных типов шифров, использовавшийся еще Юлием Цезарем, получил название *шифра сдвига*. Процесс кодирования в этом случае состоит в том, что каждой букве алфавита (далее мы будем говорить только о русском алфавите) ставится в соответствие другая буква, отстоящая от первоначальной на заданное ключом число позиций. Так, например, в шифре сдвига с ключом 6 алфавит сдвинут на 6 букв. Этот шифр можно задать следующей таблицей:

А → Ё	Ё → Л	Л → С	С → Ч	Ч → Э	Э → Г
Б → Ж	Ж → М	М → Т	Т → Ш	Ш → Ю	Ю → Д
В → З	З → Н	Н → У	У → Щ	Щ → Я	Я → Е
Г → И	И → О	О → Ф	Ф → Ъ	Ъ → А	
Д → Й	Й → П	П → Х	Х → Ы	Ы → Б	
Е → К	К → Р	Р → Ц	Ц → Ь	Ь → В	

Отметим, что знаки препинания и пробелы в шифровках обычно не ставятся. Имеющему ключ это не мешает прочитать текст, а тем, кому он не предназначен, создаст дополнительные трудности и, значит, сделает шифр более надежным. При этом текст передаваемого сообщения должен быть составлен таким образом, чтобы он понимался однозначно. Однако при желании можно зашифровать с помощью указанного шифра и знаки препинания, и пробелы. Для этого к алфавиту надо просто добавить желаемые символы и после этого производить сдвиг.

Для того чтобы разобраться с тем, как кодируется текст с использованием шифров этого типа, зашифруем с помощью шифра сдвига с ключом 6 следующую фразу:

КАЖДОМУ ЧЕЛОВЕКУ СВОЙСТВЕННО ОШИБАТЬСЯ, НО НИКОМУ,
КРОМЕ ГЛУПЦА, НЕ СВОЙСТВЕННО УПОРСТВОВАТЬ В ОШИБКЕ.

Получим следующую шифровку:

РЁМЙФТЦЭКСФЗКРЦЧЗФПЧШЗКУУФФЮОЖЁШВЧЕУФУОРФТЦ
РЦФТКИСЦХЬЁУКЧЗФПЧШЗКУУФЦХФЦЧШЗФЗЁШВЗФЮОЖРК.

Зашифрованная фраза мало похожа на оригинал, однако расшифровать ее не сложно. Ведь букв русского алфавита всего 33, а значит, существует всего 32 возможности сдвига. Поэтому, проверяя на первых буквах кода разные варианты сдвига, достаточно быстро можно найти ключ шифра.

Попробуем, например, прочитать зашифрованную с помощью шифра сдвига фразу:

ЖСФХГХСЪРСТУСФХСМНСЖ

Предположим, что ключ кода 1. Тогда букве Ж должна соответствовать стоящая перед ней буква Ё, букве С – буква Р, букве Ф – буква У. Начало нашей фразы получится ЁРУ. Судя по всему, ключ 1 не подходит.

Положив ключ кода 2, получим начало фразы ЕПТ, которое также не напоминает никакое слово русского языка. А взяв ключ кода 3, мы получим следующую фразу:

ДОСТАТОЧНО ПРОСТОЙ КОД

Таким образом, основным недостатком шифра сдвига является простота его расшифровки. В целях устранения этого недостатка был придуман тип шифров, называемый *шифром замены*. В нем каждой букве русского алфавита произвольным образом ставится в соответствие некий символ: буква, цифра, картинка и вообще произвольный знак. Например, возможен следующий ключ:

А → 1	Ё → *	Л → 7	С → ?	Ч → 9	Э → #
Б → С	Ж → 5	М → 0	Т → Д	Ш → №	Ю → \$
В → 2	З → Б	Н → (	У → Ъ	Щ → Е	Я → &
Г → Р	И →)	О → 4	Ф → 8	Ъ → И	
Д → 3	Й → +	П → Г	Х → !	Ы → К	
Е → А	К → В	Р → 6	Ц → 3	Ь → @	

Шифрование состоит в том, что буквы первоначального сообщения заменяются символами согласно ключу. Для тех, у кого есть ключ, написание и расшифровка сообщений достаточно просты. А вот без ключа расшифровать их непросто, так как количество возможных вариантов такого шифра равно

$$33! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 33 \approx 9 \cdot 10^{36},$$

поэтому даже с помощью быстродействующего компьютера на дешифровку перебором вариантов будет потрачено столько времени, что сообщение уже будет неактуально.

И тем не менее такие шифры научились расшифровывать. Идея дешифровки состоит в том, что различные буквы русского языка встречаются в осмысленных текстах с разной частотой. Например, гласная А встречается чаще согласной М. Проанализировав частоту появления в текстах разных символов, были составлены таблицы средней частоты появления каждой буквы. Так, в приведенной ниже таблице указана средняя частота появления букв русского алфавита в тексте из 1000 букв. Из нее, например, видно, что на 1000 букв русского текста приходится в среднем 28 букв П.



Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота	Буква	Частота
А, И	75	Е+Ё	88	Л	42	Р	48	Ц	5
Б, Ъ+Ъ	17	Ж	9	М	31	С	54	Ч	15
В	46	З, Ы	20	Н, Т	63	У	25	Ш, Ю	7
Г	16	Й	12	О	109	Ф	2	Щ, Э	4
Д	31	К	34	П	28	Х	11	Я	22

Анализируя с помощью данной таблицы частоту появления символов в зашифрованном тексте, а также их взаимное расположение и учитывая особенности построения слов русского языка, можно существенно сократить количество возможных вариантов ключей, а значит, сократить время перебора и в конечном счете расшифровать сообщение. В связи с этим ученые-криптографы до сих пор продолжают создавать разные виды шифров.

Одним из видов шифров, позволяющих усложнить расшифровку, являются *шифры перестановки*. В них исходный текст разбивается на группы, состоящие из одинакового числа букв. Внутри каждой группы буквы определенным образом переставляются.

Если группа достаточно длинная, то число возможных перестановок букв достаточно велико. К тому же пытающемуся расшифровать зашифрованные сообщения такого вида без ключа неизвестно, на группы какой длины разбивался текст. Поэтому расшифровка таких сообщений дело более сложное, хотя и возможное.

Зашифруем с помощью шифра перестановки следующую фразу:

**УМ ЗАКЛЮЧАЕТСЯ НЕ ТОЛЬКО В ЗНАНИИ, НО И В УМЕНИИ
ПРИЛАГАТЬ ЗНАНИЕ НА ДЕЛЕ**

Начиная с первой буквы фразы, разобьем текст на группы по 10 букв в каждой. Затем нарисуем таблицу с 10 столбцами и в первой ее строке запишем числа от 1 до 10 в произвольном порядке. Теперь запишем в клетках таблицы по строчкам, начиная со второй строки, буквы шифруемого текста без пропусков и знаков препинания:

2	5	9	3	1	8	4	7	10	6
У	М	З	А	К	Л	Ю	Ч	А	Е
Т	С	Я	Н	Е	Т	О	Л	Ь	К
О	В	З	Н	А	Н	И	И	Н	О
И	В	У	М	Е	Н	И	И	П	Р
И	Л	А	Г	А	Т	Ь	З	Н	А
Н	И	Е	Н	А	Д	Е	Л	Е	

И наконец, выписывая буквы этой таблицы по столбцам в указанном порядке (сначала из столбца, отмеченного числом 1, затем – числом 2 и т. д.), мы получим следующую шифровку:

**КЕАЕААУТОИИНАННМГНЮОИИЬЕМСВВЛИЕКОРАЧЛИИЗЛ
ЛТННТДЗЯЗУАЕАЬНПНЕ**

Ключом к расшифровке текстов данного типа является набор цифр, указанный в первой строке таблицы. Зная его, получатель без труда расшифрует текст. Если же ключ не известен, восстановить исходный текст достаточно сложно, ведь буквы остались теми же и анализ частоты встречаемости букв здесь не поможет.

Тем не менее математические методы помогают расшифровывать и такие шифры без знания ключевого слова. Мы с вами пока этими методами, к сожалению, не владеем. Но для желающего что-то узнать не существует препятствий, и тот, кто захочет научиться этому, с радостью пройдет весь путь обучения и научится решать множество полезных и красивых задач.

К

71

Выполните вычисления и расположите ответы примеров в порядке возрастания, сопоставив их соответствующим буквам. Вы узнаете название профессии, которая в буквальном переводе с итальянского языка означает «кладущий в ящик»:

К $5 \cdot 7 \cdot 3 - 35 \cdot 4$

Н $33 \cdot 34 - 34 \cdot 35$

С $(104 - 28) : 4$

Р $127 - 91 + 23 + 111$

О $52 + 68 - 22$

С $37 : 4 - 17 : 4$

Т $13 \cdot 21 - 29 \cdot 7$

А $(999 - 459) : 9$

А $(125 - 75) : 25$

И $98 \cdot 21 - 21 \cdot 128$



72

1) Прочитайте на стр. 20 учебника, как называется наука о шифрах и их дешифровке, что означает данное слово в переводе с древнегреческого.

2) Зашифруйте название науки о шифрах и их дешифровке, сопоставляя каждой букве этого слова некоторый вычислительный пример.

3) Прочитайте на стр. 20–22 учебника, как шифрование связано с понятием функции, что называется ключом шифра, какие бывают виды шифров.

73

Зашифруйте шифром сдвига с ключом 4 следующее высказывание великого древнегреческого философа и ученого Аристотеля:

ВСЕГО ПРИЯТНЕЕ ДЛЯ НАС ТЕ СЛОВА, КОТОРЫЕ ДАЮТ НАМ
КАКОЕ-НИБУДЬ ЗНАНИЕ

74

Расшифруйте высказывание одного из семи особо чтимых древнегреческих философов (семи мудрецов) Бианта Приенского, если известно, что оно зашифровано с помощью шифра сдвига:

ИШСЕГМЕЧЙСИЙОЦЧЖШГ.

75

Шифр замены задан следующим ключом:

А	→	☺
Б	→	*
В	→	α
Г	→	β
Д	→	θ
Е	→	γ

Ё	→	ε
Ж	→	κ
З	→	δ
И	→	η
Й	→	λ
К	→	μ

Л	→	π
М	→	σ
Н	→	τ
О	→	χ
П	→	φ
Р	→	ψ

С	→	ω
Т	→	!
У	→	↑
Ф	→	↕
Х	→	←
Ц	→	↔

Ч	→	∞
Ш	→	≡
Щ	→	☼
Ъ	→	♥
Ы	→	♠
Ь	→	♣

Э	→	♦
Ю	→	♪
Я	→	□

Зашифруйте с его помощью высказывание известного итальянского ученого Джордано Бруно:

СТРЕМЛЕНИЕ К ИСТИНЕ – ЕДИНСТВЕННОЕ ЗАНЯТИЕ,
ДОСТОЙНОЕ ГЕРОЯ

76

Зашифруйте шифром перестановки с ключом 78145236 высказывание известного английского ученого и философа Роджера Бэкона:

ТОТ, КТО НЕ ЗНАЕТ МАТЕМАТИКИ, НЕ МОЖЕТ УЗНАТЬ
НИКАКОЙ ДРУГОЙ НАУКИ И ДАЖЕ НЕ МОЖЕТ ОБНАРУЖИТЬ
СВОЕГО НЕВЕЖЕСТВА

- 77** Расшифруйте высказывание крупнейшего французского философа, писателя и историка Вольтера, зная, что оно зашифровано шифром перестановки с ключом 514362:

ИНЕШБЬУЕДВЛЕОТСОВВХЗИНКЕТИЕШДЙНААЬЛРТГЫОДБХО

- 78** Используя таблицу частоты появления букв в текстах, расшифруйте высказывание немецкого философа Вильгельма Гумбольдта, если известно, что оно зашифровано шифром замены и знаком * обозначена буква О, а символом С – буква А:

AB@!\$&@@@& ☼C@1!91 *DC☼E\$CF! @C G&K*\$&DC !CD*&
 2KC5*!\$*J@*& \$K91@9& DCD*& @*K@N& *DC☼E\$C&! @C
 PJ9J*QA *@9 JC@@&9\$CF! BJCG@*& @C@!J*&@9& P*@!&P&@C@*
 *2K&5GCF! @*5J&\$CF! P*Q@9BCF! QAT

- π 79** Какие высказывания являются общими, какие – высказываниями о существовании, а какие – ни теми ни другими? Определите их истинность. Для ложных высказываний постройте отрицание.

- Частное от деления числа 75 само на себя равно 1.
- Существуют целые числа, которые при делении их на себя дают в частном 2.
- Все целые числа при делении их на себя дают в частном 3.
- Существует такое целое число, которое в сумме с 6 дает 17.
- Число 3 является решением уравнения $3x - 9 = 0$.
- Все решения уравнения $(x + 3)(2x - 9) = 0$ могут быть записаны как обыкновенные дроби.
- Число 4 меньше 5.
- Все рациональные числа, меньшие 5, больше (-100) .
- Существуют рациональные числа, меньшие 7 и большие 2.

- 80** Упростите выражение:

- $(2a^2 - (3a^2 - 4) + 2a^2 - (2 + a^2))^2$;
- $(3x - y)^3 - (3x + y)^3$;
- $p^2(q - r) + r(1 - p) + p(pr + r) - pq(p + 1)$;
- $(m + 2)(3 - m) + (4 - m)(m + 1) + (m - 4)(m + 4)$.



- 81** Сократите дроби при допустимых значениях переменных:

- $\frac{55x^{12}y^{34}z^{23}}{11x^{11}y^{35}z^{22}}$;
- $\frac{36p^{10}q^{15} - 54p^8q^{12}}{18p^{10}q^{12}}$;
- $\frac{81a^{54}b^{33}c^{65}}{27a^{56}b^{34}c^{65}}$;
- $\frac{21a^4b^8 + 49a^8b^4}{35a^5b^5}$;
- $\frac{102m^{69}n^{35}k^{70}}{6m^{78}n^{70}k^{34}}$;
- $\frac{32x^4y^6 - 40x^8y^9}{56x^6y^6 - 24x^8y^8}$.

- 82** а) Два числа относятся одно к другому как 5 к 7. Если меньшее из них разделить на 3, то результат будет на 16 больше частного большего числа и числа 9. Найдите эти числа.

- б) Отец завещал трем своим сыновьям крупную сумму денег. Наследство было разделено между старшим, средним и младшим сыновьями в отношении $9 : 7 : 3$. Какую сумму денег завещал отец своим сыновьям, если младший получил 270 тыс. р.?

83 Выполните указанное действие по модулю m :

- а) $9 + 7, m = 4$; г) $74 - 11, m = 5$; ж) $4 \cdot 9, m = 13$;
 б) $11 + 15, m = 9$; д) $35 - 96, m = 6$; з) $48 \cdot 52, m = 17$;
 в) $26 + 38, m = 7$; е) $49 - 85, m = 11$; и) $6^7, m = 19$.

84 Найдите остаток от деления a на b :

- а) $a = 298^{892}, b = 11$; б) $a = 564^{465}, b = 7$; в) $a = 351^{153}, b = 6$.

2

85 Зашифруйте шифром сдвига с ключом 7 следующее высказывание известного французского математика Рене Декарта:

ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ УСОВЕРШЕНСТВОВАТЬ УМ, НАДО
БОЛЬШЕ РАЗМЫШЛЯТЬ, ЧЕМ ЗАУЧИВАТЬ

86 Расшифруйте высказывание итальянского физика, философа и математика Галилео Галилея, если известно, что оно зашифровано с помощью шифра сдвига.

КЦЙЦШРЪДЧЫЪЗХХЦЫФММЪЙЩЖТРСКЦЙЦШРЪДЖЩХЦХМФХЦКРМ

87 Шифр замены задан следующим ключом:

А	→	1	Ё	→	7	Л	→	С	С	→	І	Ч	→	О	Э	→	U
Б	→	2	Ж	→	8	М	→	D	Т	→	J	Ш	→	P	Ю	→	V
В	→	3	З	→	9	Н	→	E	У	→	K	Щ	→	Q	Я	→	W
Г	→	4	И	→	!	О	→	F	Ф	→	L	Ъ	→	R			
Д	→	5	Й	→	A	П	→	G	Х	→	M	Ы	→	S			
Е	→	6	К	→	B	Р	→	H	Ц	→	N	Ь	→	T			

Зашифруйте с его помощью высказывание известного английского физика Уильяма Грове:

ИСТИННАЯ НАУКА НЕ ЗНАЕТ НИ СИМПАТИЙ, НИ АНТИПАТИЙ:
ЕДИНСТВЕННАЯ ЦЕЛЬ ЕЁ – ИСТИНА

88 Зашифруйте шифром перестановки с ключом 951427836 высказывание известного немецкого философа Фридриха Ницше:

КТО ХОЧЕТ НАУЧИТЬСЯ ЛЕТАТЬ, ТОТ ДОЛЖЕН СПЕРВА НАУЧИТЬСЯ
СТОЯТЬ, И ХОДИТЬ, И БЕГАТЬ, И ЛАЗИТЬ, И ТАНЦЕВАТЬ: НЕЛЬЗЯ СРАЗУ
НАУЧИТЬСЯ ПОЛЕТУ

89 Расшифруйте высказывание древнегреческого философа Платона, зная, что оно зашифровано шифром перестановки с ключом 3572461.

ИВНТНСМИНБОЖСЛНОСЕЕЕВАТУАСГЕТООСОСНВАЧИДНТОСЬ
ИЙТЗОНЕЕАНР

90 Расшифруйте высказывание известного итальянского художника и ученого Леонардо да Винчи, если известно, что оно зашифровано шифром замены и символ А обозначает букву Т, символ В – букву А, а символ Т – букву С:

ABC D© CBC FGHIGJ©KL© FLJL N©O PQGRGISTARLV
FW©RWBVB©ATV R TCPXKG© FLABKL© ABC OBKVAL© KBPCGY
N©O TAWBTAL OBTGWV©A FBZVAS CGAGWBV TABKGRLATV
K©TFGTGNKGY PTRBLRBAS AG XAG GKB FGHIGJB©A

91 Упростите выражение:

а) $(2a + b)^3 - (2a - b)^3$;

б) $5p^2 - q(p + q) - (3(-q^2 + p^2 - 2pq) - (-4pq - 4(q^2 + 2pq)))$.

92 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{18a^9b^7 + 24a^7b^9}{36a^7b^7}$; б) $\frac{75m^{57}n^{69}k^{39}}{25k^{39}m^{58}n^{68}}$; в) $\frac{45x^9y^5 - 54x^7y^6}{27x^7y^7 - 63x^9y^9}$.

93 В пончиковой компании Антона и Ксюши часть прибыли за 2010 год решили потратить на выплаты дивидендов собственникам. Было принято решение разделить ее между Антоном, Ксюшей и прочими акционерами в отношении 5 : 4 : 2. Какую сумму денег получил Антон, если выплаты прочим акционерам составили 120 тыс. р.?

94 Выполните указанное действие по модулю m :

а) $12 + 16, m = 5$; в) $26 - 51, m = 8$; д) $21 \cdot 19, m = 15$;

б) $39 + 41, m = 9$; г) $44 - 97, m = 7$; е) $4^8, m = 11$.

95 Найдите остаток от деления a на b :

а) $a = 417^{714}, b = 7$; б) $a = 318^{813}, b = 11$; в) $a = 596^{695}, b = 5$.

С

96* Встретились два бывших одноклассника – биолог и математик. Биолог предложил математику определить возраст его сыновей и сообщил, что произведение полных лет трех его сыновей равно 36. Математик на это ему ответил, что этих данных ему недостаточно, чтобы определить возраст каждого из его детей. Тогда биолог сообщил, что сумма возрастов его детей равна номеру школы, в которой они учились. Математик на это ответил, что и этих данных ему мало. Хитрый биолог добавил тогда, что старший его сын рыжий. После этого математик правильно определил возраст сыновей биолога. Сможете ли вы определить возраст сыновей биолога и номер школы, в которой учились биолог и математик?

97* В университете имени М.В. Ломоносова преподаватели Антонова, Бирюкова, Кузьмина, Дудкин, Иванов и Филатов преподают шесть разных предметов: высшую математику, физику, программирование, отечественную историю, общую психологию и английский язык. Известно, что:

1. Преподаватели программирования и общей психологии – женщины.
 2. Иванов старше Филатова, но преподавателем он работает меньше, чем преподаватель высшей математики.
 3. Будучи студентами, Антонова и Бирюкова учились в педагогическом институте. Все остальные преподаватели окончили университет имени М.В. Ломоносова.
 4. Филатов – отец преподавателя физики.
 5. Преподаватель английского языка старше всех, при этом преподавателем он работает дольше всех.
 6. Преподаватель английского языка работает в университете им. М.В. Ломоносова с того момента, как окончил его. Преподаватели психологии и отечественной истории – его бывшие студенты.
 7. Антонова старше преподавателя программирования.
- Определите, кто какой предмет преподаёт.



§ 2. Линейные процессы и линейная функция

1. Прямая пропорциональность



Математика – это наука о связи величин.

Герман Гюнтер Грассман (1809–1877),
немецкий физик, математик и филолог

Решая задачи и наблюдая за поведением различных величин на практике, мы видели, что между некоторыми из них существуют определенные зависимости. Так, пройденный путь зависит от скорости и времени движения, площадь круга зависит от его диаметра, площадь квадрата зависит от длины его стороны и т. д.

При этом мы замечали, что у многих зависимостей, описывающих, казалось бы, совершенно разные процессы, имеется много общего. Например:

1) Если мы движемся с постоянной скоростью 70 км/ч, то при увеличении времени движения в два раза пройденный нами путь тоже увеличится в два раза.

2) Если мы покупаем помидоры по цене 70 р. за килограмм, то, увеличив массу покупки в два раза, мы заплатим за нее в два раза больше.

3) Если некоторый рабочий производит 70 деталей в час, то, увеличив время своей работы в два раза, он заметит, что количество сделанных им деталей также увеличилось в два раза.

И таких примеров можно привести огромное количество. Общее же у них то, что с увеличением (уменьшением) одной из величин в несколько раз другая величина увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Обобщенное описание и последующее исследование зависимостей между величинами позволяет создать общие способы решения разнообразных задач данного вида. Подобно тому, как изучение чисел позволяет нам применять их свойства, не задумываясь о том, что именно мы считаем – тетради, деньги, размеры дома или скорость ракеты.

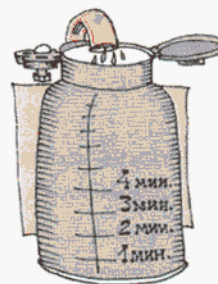
Мы уже знаем, что рассмотренный тип зависимости называется *прямо пропорциональной* зависимостью. Такая зависимость может быть записана с помощью единой формулы:

$$y = kx,$$

где x и y – соответствующие значения независимой и зависимой величин, а число k называется *коэффициентом пропорциональности*.

При положительных k и x данное равенство показывает, что при увеличении (уменьшении) значения x в несколько раз значение y увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Итак, мы можем дать следующее определение прямо пропорциональных величин.



Определение 1. Две величины x и y называются **прямо пропорциональными**, если они связаны формулой $y = kx$, где k – некоторое число. Число k называется **коэффициентом пропорциональности**.

Напомним, что название данной зависимости связано с тем, что, в соответствии с равенством $y = kx$, если $y_1 = kx_1$, а $y_2 = kx_2$, то

$$\frac{y_1}{x_1} = k, \frac{y_2}{x_2} = k \Rightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Таким образом, величины y_1 , x_1 , y_2 и x_2 образуют пропорцию.

Прямо пропорциональная зависимость является одной из самых простых. Но большинство величин в реальной жизни ведут себя иначе. Например, сторона квадрата не прямо пропорциональна его площади: если увеличить сторону квадрата в 2 раза, его площадь увеличится не в 2, а в 4 раза. Но чтобы изучить поведение более сложных зависимостей, нам надо сначала разобраться с более простыми.

Во-первых, заметим, что, согласно равенству $y = kx$, каждому рациональному числу x сопоставляется единственное число y . Значит:

Прямо пропорциональная зависимость $y = kx$, где k – произвольное число, является функциональной зависимостью, или *функцией*. Областью определения данной функции являются все известные нам числа.

Построим график прямой пропорциональности, взяв в качестве примера зависимость $y = 1,5x$. Для этого составим таблицу соответствующих значений переменных x и y :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-6	-4,5	-3	-1,5	0	1,5	3	4,5	6

Затем отметим точки с вычисленными координатами $(x; y)$ на координатной плоскости Oxy (рис. 1).

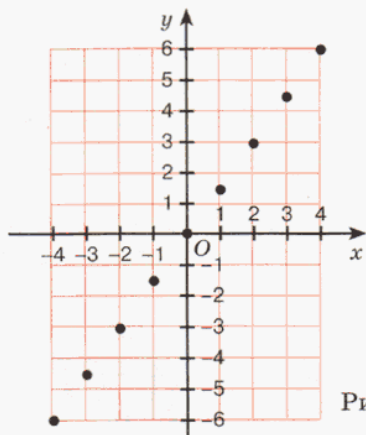


Рис. 1

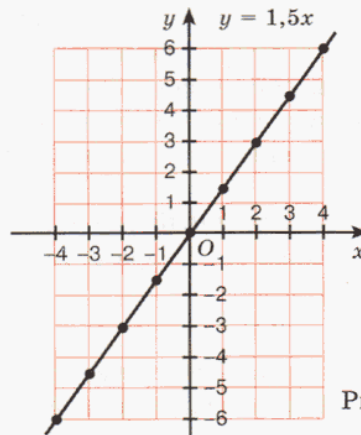
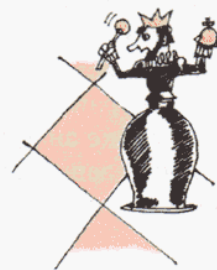


Рис. 2

Можно доказать, что все полученные точки принадлежат некоторой прямой (рис. 2), то есть верна следующая теорема.

Теорема. Графиком функции $y = kx$ является прямая линия.

Доказательство данной теоремы будет получено позднее в курсе геометрии, пока нам для этого не хватает знаний.



Так как график прямой пропорциональности – это прямая, а через две различные точки можно провести ровно одну прямую, то для построения графика функции $y = kx$ нам достаточно найти лишь две точки, принадлежащие этой прямой.

Заметим, что при любом коэффициенте пропорциональности k , если $x = 0$, то и $y = 0$. Значит:

График функции $y = kx$ всегда проходит через начало координат – точку $O(0; 0)$.

Следовательно, чтобы построить график $y = kx$, нам надо найти еще лишь одну точку, принадлежащую этому графику. Например, чтобы построить график функции $y = -0,5x$, можно взять значение $x_1 = 4$, найти соответствующее значение $y_1 = -0,5 \cdot 4 = -2$, а затем провести прямую через полученную точку $(4; -2)$ и начало координат (рис. 3).

Таким образом, мы можем записать следующий алгоритм построения графика прямой пропорциональности.

Алгоритм построения графика функции $y = kx$

1. Отметить на координатной плоскости Oxy точку O с координатами $(0; 0)$.
2. Выбрать некоторое значение $x_1 \neq 0$.
3. Вычислить значение $y_1 = kx_1$.
4. Отметить на координатной плоскости Oxy точку A с координатами $(x_1; y_1)$.
5. Через точки O и A провести прямую.

Расположение графика функции $y = kx$ на координатной плоскости зависит от знака коэффициента k . Так, если $k > 0$, то знаки соответствующих значений x и y всегда одинаковы, поэтому график $y = kx$ располагается в I и III координатных четвертях (рис. 4). Аналогично при $k < 0$ знаки x и y всегда различны, поэтому график данной функции располагается во II и IV координатных четвертях (рис. 5).

Если $k = 0$, то при всех значениях x значение $y = 0$. Значит, графиком прямой пропорциональности в этом случае является ось Ox .

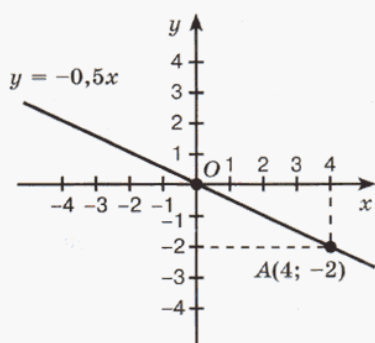


Рис. 3

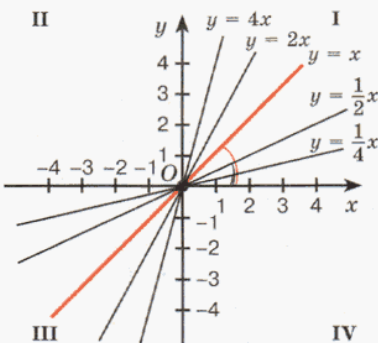


Рис. 4

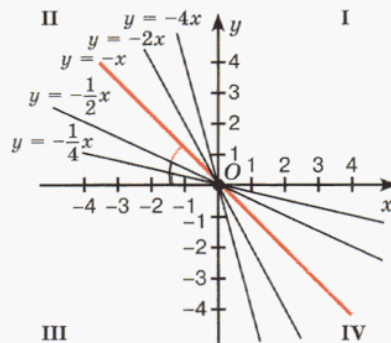


Рис. 5

Наблюдая за тем, как при изменении k ведет себя график прямой пропорциональности, можно заметить различные закономерности, например:

1) Если $k \neq 0$, то областью значений прямой пропорциональности является множество всех известных нам чисел, а если $k = 0$, то область значений состоит из одного числа 0.

2) График функции $y = x$ ($y = -x$) является биссектрисой I и III (II и IV) координатных углов.

3) С увеличением $|k|$ острый угол между графиком $y = kx$ и осью абсцисс Ox увеличивается (график становится «круче»), а с уменьшением $|k|$ — уменьшается (график более «пологий»).

Можно наблюдать и многие другие закономерности расположения графика прямой пропорциональности $y = kx$: например, его симметрия относительно начала координат; особенности его расположения относительно координатных осей и другие.

К

98

Функции заданы таблично. Задайте эти функции формулами и постройте их графики в одной системе координат Oxy .

а)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8

б)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

в)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3

г)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Чему равно множество значений каждой из этих функций? Через какую общую точку проходят все их графики?

99

1) Запишите формулу зависимости длины пути в км, пройденного с постоянной скоростью 3 км/ч, от времени движения в часах. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

2) Запишите формулу зависимости стоимости в р. пользования Интернетом по цене 500 р. в месяц от количества месяцев подключения к Интернету. Приведите примеры других величин, связанных аналогичной зависимостью. Является ли данная зависимость функциональной?

3) Зачем нужны обобщенные описания процессов? Задайте предыдущие две зависимости единой обобщенной формулой. Как называется такая зависимость? Почему? Какие ее общие свойства вам известны? Найдите ее область определения и докажите, что она является функцией.

4) Сопоставьте свои выводы с определением и выводами на стр. 27–28 учебника.

100

Выберите из предложенных зависимостей те, которые являются прямой пропорциональностью, и укажите коэффициент пропорциональности k .

- а) $y = -2x$; в) $y = 0,5x$; д) $y = x : 7$; ж) $y = 3x^2$; и) $y = 0 \cdot x + 4$;
 б) $y = x + 3$; г) $y = 0 \cdot x$; е) $y = 2 : x$; з) $y = 5x$; к) $y = 0 - 3x$.

- 101** 1) Запишите формулу зависимости стоимости покупки яблок по цене 1,5 тыс. р. за центнер от массы купленных яблок. Докажите, что данная зависимость является прямой пропорциональностью, и постройте ее график. Что вы замечаете?
- 2) Какое минимальное количество точек нужно отметить на координатной плоскости для построения графика прямой пропорциональности? Почему? Какие точки лучше взять?
- 3) Исходя из своих наблюдений, составьте алгоритм построения графика прямой пропорциональности.
- 4) Сравните свои выводы и алгоритм с выводами и алгоритмом на стр. 28–29 учебника.

- 102** Пользуясь алгоритмом построения графика прямой пропорциональности, постройте на одной координатной плоскости графики зависимости $y = kx$, если:
- а) $k = 1$; $k = 3$; $k = \frac{1}{3}$; $k = 6$; $k = \frac{1}{6}$; б) $k = -1$; $k = -3$; $k = -\frac{1}{3}$; $k = -6$; $k = -\frac{1}{6}$.
- Что вы замечаете? Сравните свои выводы с выводами на стр. 29–30 учебника.

- 103** Не строя графика зависимости $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если:

а) $k = 2,3$; б) $k = -6,7$; в) $k = -1,9$; г) $k = 5,6$; д) $k = -6,4$.

- 104** Определите коэффициент пропорциональности функции $y = kx$, проходящей через точку А. Опишите расположение ее графика в координатной плоскости.

а) А (2; 10); в) А (0,5; -2); д) А (-4; 0,5); ж) А (1,2; 6);
б) А (-3; 12); г) А (-0,4; -8); е) А (3; -1,5); з) А (-7; -1,4).

- 105** 1) Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = x$ и $y = -x$ и два графика прямой пропорциональности, один из которых проходит через точку А, а другой – через точку В. Задайте данные функции аналитически (формулой). Что вы замечаете?

а) А (4; 1), В (4; -1); в) А (4; 10), В (-4; 10); д) А (-3; -8), В (3; -8);
б) А (-2; 8), В (2; 8); г) А (5; -2), В (-5; -2); е) А (4; 1,5), В (-4; 1,5).

2) Проанализируйте расположение на координатной плоскости каждого из построенных графиков и их взаимное расположение.

- 106** 1) Прямая пропорциональность задана таблицей. Определите коэффициент пропорциональности данной зависимости и найдите недостающие в таблице значения. Задайте зависимость аналитически (формулой) и постройте ее график.

а)

x	-5		-1	0	2	4
y		-6		0	4	

в)

x	-6		-2	2		5
y	1,5	1			-0,75	

б)

x	-8		-2	0	2	6
y		9	3	0		

г)

x	-4		-1	3	5	6
y		6			-15	

2) При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

- 107** График прямой пропорциональности проходит через точку $A(p; q)$. Найдите коэффициент пропорциональности и опишите особенности расположения данного графика на координатной плоскости. Затем постройте график и проверьте свои выводы.

а) $p = 2, q = -2$; в) $p = -5, q = 2,5$; д) $p = 1, q = 0,3$;
 б) $p = 3, q = 1,5$; г) $p = -8, q = -1,6$; е) $p = 0,25, q = -2$.

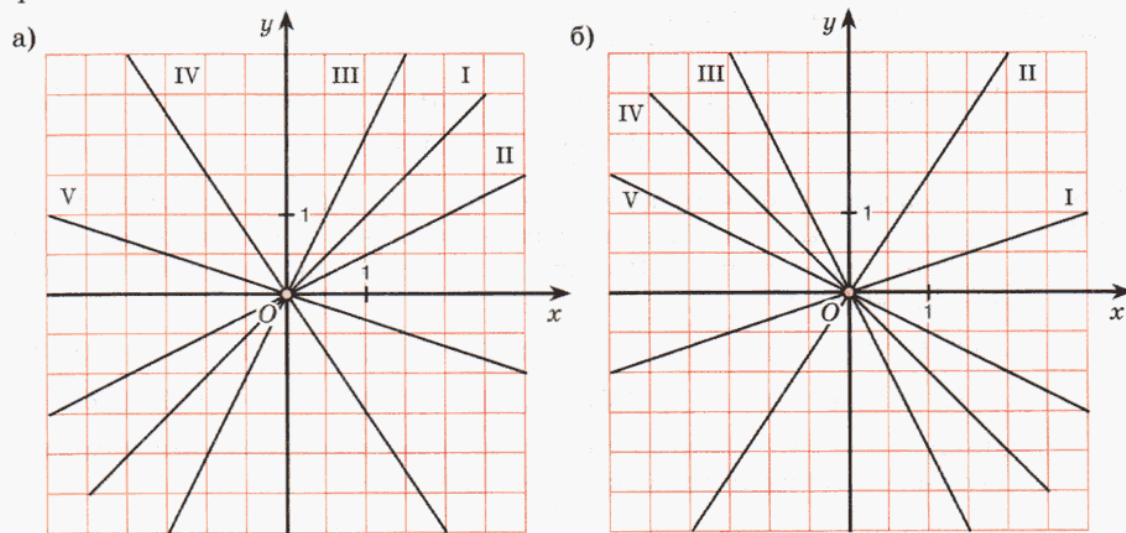
- 108** Для прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $k = 0,5; a = 6,5; b = -1,5$; в) $k = \frac{1}{7}; a = 1,4; b = -2$; д) $k = 3; a = 4; b = 15$;
 б) $k = -2; a = -2,5; b = 8$; г) $k = -0,4; a = -2,5; b = 4$; е) $k = -\frac{5}{9}; a = -1,8; b = -3,5$.

- 109** Принадлежат ли графику функции $y = kx$ точки A и B , если:

а) $k = 2, A(0; 2), B(-3; -6)$; г) $k = -3, A(-2; 6), B(3; 9)$;
 б) $k = 0,4, A(0,4; 0), B(-2; 0,8)$; д) $k = -1, A(-4; 4), B(0,5; -0,5)$;
 в) $k = 4, A(0; 0), B(-1,5; 6)$; е) $k = -0,5, A(-0,5; 2), B(4; 2)$.

- 110** Задайте аналитически (формулой) каждую из функций, представленных на графике:



- 111** График прямой пропорциональной зависимости проходит через точку A . Проходит ли он через точку B ?

а) $A(4; 2), B(-6; 3)$; в) $A(8; -2), B(12; -3)$; д) $A(-2; -0,5), B(-4; -1)$;
 б) $A(-9; 4,5), B(7; 3,5)$; г) $A(-1,5; 6), B(-2; -8)$; е) $A(5; 1), B(-6; -1,2)$.

- 112** Прямая проходит через начало координат и точку A . Является ли эта прямая графиком функции $y = kx$, если:

а) $k = 3, A(2; 6)$; в) $k = 4, A(-2; -8)$; д) $k = -1,5, A(3; -4)$;
 б) $k = -2, A(-1; -2)$; г) $k = -0,5, A(2; -1)$; е) $k = 2,1, A(3; 6,3)$?

π**113** Вычислите отношения:

- а) $2,6 : 5,2$; б) $9 : 0,06$; в) $0,7 : 2\frac{1}{3}$; г) $2,25 : 0,9$.

114

Точка C принадлежит отрезку AB . Что показывают отношения $\frac{AC}{AB}$, $\frac{AB}{AC}$? Какие еще отношения можно составить?

115

Измерьте длины сторон треугольников ABC и DBE и вычислите отношения $\frac{DB}{AB}$, $\frac{BE}{BC}$, $\frac{DE}{AC}$ (рис. 6). Что вы замечаете? Как можно назвать данные величины?

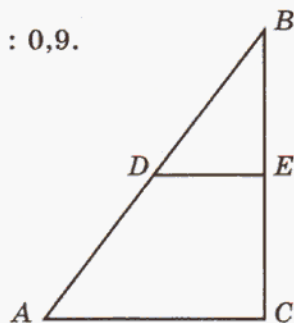


Рис. 6

116

Прочитайте пропорцию разными способами: $5 : 10 = 6 : 12$. Назовите ее крайние члены, средние члены, основное свойство пропорции. Докажите, что опять получится пропорция, если:

- а) поменять местами крайние члены;
б) поменять местами средние члены;
в) заменить каждое отношение обратным.

Какие еще преобразования помогут получить из этих же чисел новую пропорцию?

**117**

Дана пропорция: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Какие другие пропорции, членами которых являются те же числа a , b , c и d , можно записать?

118

Решите уравнение:

- а) $\frac{0,8}{x} = \frac{0,21}{\frac{7}{8}}$; б) $3,6 : \frac{9}{1,1} = 0,44 : y$; в) $\frac{2}{2a+1} = \frac{2a-1}{40}$; г) $\frac{2d+16}{3d} = \frac{d}{6}$.

119

Решите задачу методом пропорций:

- а) На пошив 12 одинаковых платьев израсходовали 49,8 м ткани. Сколько таких же платьев можно сшить из 74,7 м этой ткани?
б) Для окраски 15 м^2 пола требуется 2,1 кг краски. Сколько краски потребуется для окраски пола прямоугольной комнаты длиной 6,3 м и шириной 4,5 м?
в) Из 158 л молока получается 3,2 кг сливочного масла. Сколько нужно взять молока, чтобы приготовить 16 кг сливочного масла?
г) Маятник часов делает 198 качаний за 2 мин 24 с. Сколько качаний он сделает за 3 мин 12 с.?

120

Не проводя вычислений, сравните значения числовых выражений:

- а) $|195 - 271| \cdot |189 - 193|$ и $(195 - 271)(189 - 193)$;
б) $|512 - 415| \cdot |277 - 396|$ и $(512 - 415)(277 - 396)$;
в) $(213 - 378) \cdot |567 - 613|$ и $|213 - 378| \cdot (567 - 613)$;
г) $|476 - 245| \cdot (345 - 678)$ и $(476 - 245) \cdot |345 - 678|$.



121 Решите уравнение:

а) $|x - 2010| + |2010 - x| = 2012$; б) $|x - 365| + |2x - 730| = 36$.

122 Определите, какой цифрой оканчивается число:

а) 399^{993} ; б) $514^{415^{10}}$.

123 Выберите из предложенных зависимостей те, которые являются прямой пропорциональностью, и укажите коэффициент пропорциональности k .

а) $y = 1,2x$; в) $y = 0 \cdot x$; д) $y = 8 : x$; ж) $y = -4x^2$; и) $y = 5x + 6$;
б) $y = -2x + 1$; г) $y = 3x + 0$; е) $y = x : 15$; з) $y = x$; к) $y = -0,8x^3$.

124 Пользуясь алгоритмом построения графика прямой пропорциональности, постройте на одной координатной плоскости графики зависимости $y = kx$, если:

$k = 1$; $k = -1$; $k = 2$, $k = -2$, $k = \frac{1}{2}$; $k = -\frac{1}{2}$.

Какие закономерности в расположении данных графиков вы наблюдаете?

125 Не строя графика зависимости $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если:

а) $k = 7,8$; б) $k = -3,5$; в) $k = -9,6$; г) $k = 2,4$.

126 1) В таблице задана прямая пропорциональность. Определите коэффициент пропорциональности данной зависимости и найдите недостающие в таблице значения. Задайте зависимость аналитически (формулой) и постройте ее график.

а)

x	-5		-1	0	3	4
y		-12	-3	0		

б)

x	-8		-4	-2	1	3
y		9		3		

2) При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

127 График прямой пропорциональности проходит через точку $A(p; q)$. Найдите коэффициент пропорциональности и опишите особенности расположения данного графика на координатной плоскости. Затем постройте график и проверьте свои выводы.

а) $p = -5$, $q = 5$; б) $p = 3$, $q = -9$; в) $p = -4$, $q = -1,6$.

128 Определите коэффициент пропорциональности функции $y = kx$, проходящей через точку A . В каких координатных четвертях расположен ее график?

а) $A(3; 12)$; б) $A(1,5; -3)$; в) $A(-7; 3,5)$; г) $A(1,8; 9)$.

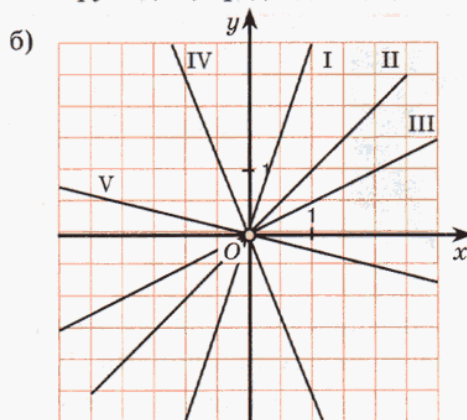
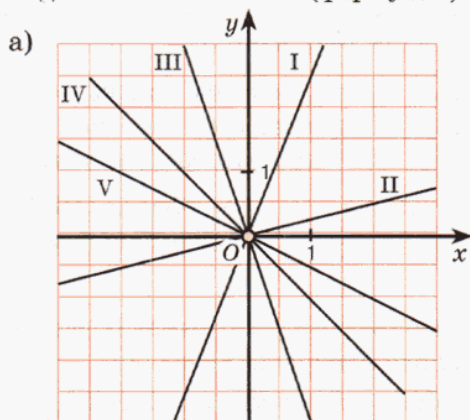
129 Для прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $k = 3$; $a = 4$; $b = -5$; в) $k = -0,8$; $a = -1,5$; $b = 3$;
б) $k = -1,5$; $a = -3$; $b = 6$; г) $k = 5$; $a = 2$; $b = 7$.

130 Принадлежат ли графику функции $y = kx$ точки A и B , если:

а) $k = 0,3$, $A(0; 4)$, $B(-1; -0,3)$; в) $k = -0,4$, $A(-2; 8)$, $B(3; -1,2)$;
б) $k = 1,2$, $A(0,5; 0,6)$, $B(-1; -1,2)$; г) $k = -2,1$, $A(-3; 6,3)$, $B(0,7; -0,3)$.

131 Задайте аналитически (формулой) каждую из функций, представленных на графике:



132 График прямой пропорциональной зависимости проходит через точку А. Проходит ли он через точку В?

а) А (6; -2), В (-12; 4); б) А (5; 2,5), В (-7; 3,5); в) А (-4; -1), В (2; 0,5).

133 Дана пропорция: $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$. Какие другие пропорции, членами которых являются те же числа x, y, m и n , можно записать?

134 Решите уравнение:

а) $x : 2,8 = 1\frac{2}{7} : 3,6$; б) $\frac{25}{10,8} = \frac{y}{0,54}$; в) $\frac{k+1}{2} = \frac{8}{k+1}$; г) $\frac{c+4}{2} = \frac{15c+24}{9c}$.

135 Решите задачи методом пропорций:

а) В пончиковой компании Антона и Ксюши для выпечки 270 кг пончиков расходуют 217,5 кг муки. Сколько муки нужно приготовить для выпечки 801 кг пончиков?

б) Из 0,3 тонны свежего винограда изготавливают 35 кг изюма для пончиков. Сколько изготовят изюма из 2,1 тонны свежего винограда?

136 Решите уравнение:

а) $|x-3| + |3-x| = 16$; б) $|x-516| + |516-x| = 1032$.

137 Определите, какой цифрой оканчивается число:

а) 429^{924} ; б) $356^{653^{14}}$.

138 Найдите остаток от деления А на В:

$$A = \left(54\frac{3}{5} : 2\frac{1}{2} - 20\frac{8}{15} \cdot 7\frac{1}{2}\right) : \left(3\frac{13}{21} \cdot 8\frac{2}{5} - 29\frac{2}{5}\right) + \frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{5} - \frac{21}{25};$$

$$B = \frac{7}{9} \cdot 1\frac{2}{7} + 43\frac{3}{4} : 11\frac{2}{3} - 3\frac{18}{25} + 1\frac{1}{45} \cdot \left(37\frac{1}{2} : 2\frac{1}{12} - 1\frac{3}{23} \cdot 9\right) - \frac{3}{100}.$$



139* Кого больше, спортсменов или школьников, и во сколько раз, если каждый десятый школьник – спортсмен, а каждый сотый спортсмен – школьник?

140* Андрей и Толик весят вместе 40 кг, Толик и Миша – 50 кг, Миша и Ваня – 90 кг, Ваня и Дима – 100 кг, Дима и Андрей – 60 кг. Сколько весит Андрей?

2. Линейная функция и ее график



Математик, так же как художник или поэт, создает узоры. И если эти узоры более устойчивы, то лишь потому, что они составлены из идей.

Годфри Харолд Харди (1877–1947),
английский математик

Разобравшись с прямой пропорциональностью, рассмотрим теперь более сложную зависимость между величинами. Для этого решим следующую задачу.

Задача. Тане надо купить x тетрадей и альбом. Одна тетрадь стоит 25 р., а один альбом – 200 р. Сколько денег должна заплатить Таня за всю покупку?

Решение:

Чтобы узнать стоимость Таниной покупки, надо сложить стоимость тетрадей и альбома. Тетради стоят 25 x рублей, а альбом – 200 р. Значит, всего Таня должна заплатить $25x + 200$ рублей.

Анализируя полученное выражение, мы замечаем, что зависимость между количеством купленных тетрадей и стоимостью всей покупки не является прямой пропорциональностью – она не может быть описана формулой $y = kx$. Но ее можно записать в виде $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа. Зависимости такого вида называются *линейными*.

Определение 1. Зависимость между величинами x и y называется **линейной**, если данные величины связаны формулой $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа.

В рассмотренной нами выше задаче для каждого натурального значения x мы можем найти соответствующее значение стоимости покупки:

если $x = 1$, то $25x + 200 = 25 \cdot 1 + 200 = 225$ рублей;

если $x = 2$, то $25x + 200 = 25 \cdot 2 + 200 = 250$ рублей и т. д.

В общем случае равенство $y = kx + b$ каждому рациональному числу x сопоставляет единственное число y . Значит, линейная зависимость является функциональной (то есть функцией). А областью определения данной функции, которая получила название *линейной*, являются все известные нам числа.

Определение 2. Функция вида $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, называется **линейной функцией**.

Рассмотрим частные случаи функции $y = kx + b$, когда k и (или) b принимают значения, равные нулю:

Значения коэффициентов	Вид функции	Особенности функции
$b = 0$	$y = kx$	Прямая пропорциональность
$k = 0$	$y = b$	Графиком является прямая $y = b$, параллельная оси Ox .
$k = 0, b = 0$	$y = 0$	Графиком является ось Ox .

Таким образом, если $b = 0$, то линейная функция превращается в прямую пропорциональность, а если $k = 0$, то графиком линейной функции является прямая $y = b$,

параллельная оси абсцисс Ox . Если же $k = 0$ и $b = 0$ одновременно, то ее графиком является сама ось абсцисс Ox .

Согласно определению, линейными являются, например, следующие функции:

$$y = 0,5x + 3; y = 2x; y = -0,7x; y = -4x - 1; y = 2; y = -0,1.$$

Чтобы построить график функции, например, $y = 0,5x + 3$, построим сначала знакомый нам график прямой пропорциональности $y = 0,5x$. Это прямая, проходящая через точки с координатами $(0; 0)$ и $(2; 1)$ (рис. 7).

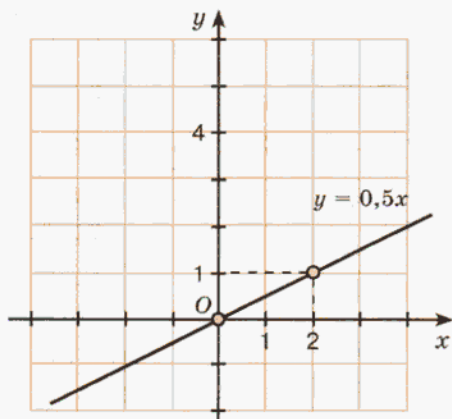


Рис. 7

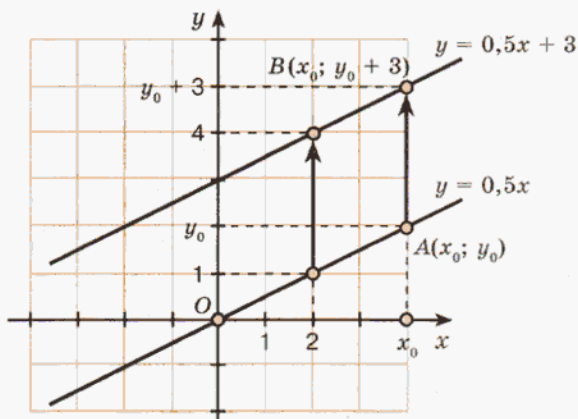


Рис. 8

Для того чтобы построить график функции $y = 0,5x + 3$, заметим, что он получается сдвигом графика $y = 0,5x$ вдоль оси Oy на 3 единицы вверх (рис. 8). Действительно, найдем значение этих функций в произвольной точке x_0 :

Функция	Значение аргумента	Значение функции	Соответствующая точка графика
$y = 0,5x$	x_0	$y_0 = 0,5x_0$	$A(x_0; y_0)$
$y = 0,5x + 3$	x_0	$0,5x_0 + 3 = y_0 + 3$	$B(x_0; y_0 + 3)$

Таким образом, ордината любой точки B графика $y = 0,5x + 3$ на 3 единицы больше, чем ордината точки A графика $y = 0,5x$ с той же абсциссой x_0 . Значит, если мы сделаем параллельный перенос графика $y = 0,5x$ на 3 единицы вверх вдоль оси Oy , то получим график $y = 0,5x + 3$.

Аналогично рассуждая, можно показать, что

График линейной функции $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, может быть получен из графика функции $y = kx$ путем его параллельного переноса вдоль оси Oy на b единиц вверх, если b – положительно, или на $|b|$ единиц вниз, если b – отрицательно.

Итак, график линейной функции также является прямой. Значит, как и в случае прямой пропорциональности, для его построения нам достаточно найти лишь две точки, принадлежащие этому графику.

Построим, например, график функции $y = -\frac{x}{3} - 1$. Мы можем построить этот график двумя способами.

Способ 1

Этот способ удобен, когда нами уже построен график $y = -\frac{x}{3}$.

Так как коэффициент b нашей линейной функции равен $-1 < 0$, то график функции $y = -\frac{x}{3} - 1$ получается из графика функции $y = -\frac{x}{3}$ параллельным переносом вдоль оси Oy на $|-1| = 1$ единицу вниз (рис. 9).

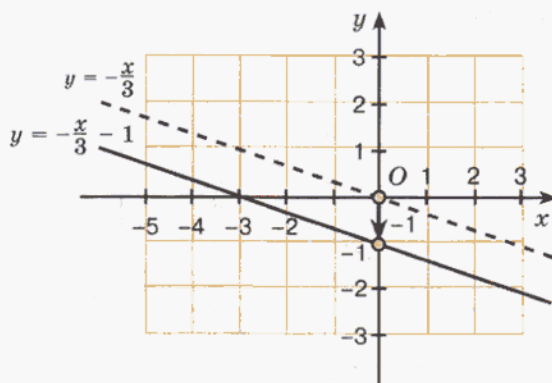


Рис. 9

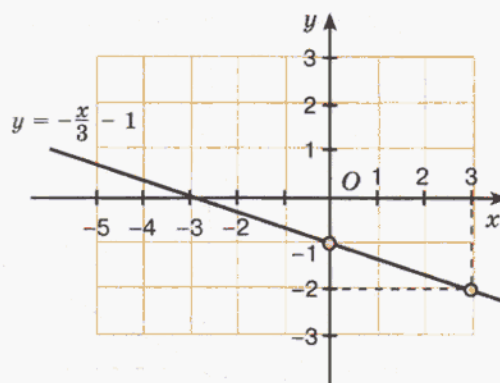


Рис. 10

Способ 2

Этот способ удобен для построения произвольного графика линейной функции.

Найдем две точки, принадлежащие графику функции $y = -\frac{x}{3} - 1$.

Обычно выбирают одну точку с абсциссой 0, а вторую – произвольно, с учетом удобства вычислений, например:

$$\text{если } x = 0, \text{ то } y = -\frac{1}{3} \cdot 0 - 1 = -1,$$

$$\text{если } x = 3, y = -\frac{1}{3} \cdot 3 - 1 = -2.$$

Значит, указанный график проходит через точки с координатами $(0; -1)$ и $(3; -2)$.

Построим эти две точки и проведем через них прямую. Полученная прямая и будет являться графиком указанной зависимости (рис. 10).

Таким образом, мы можем записать следующий алгоритм построения графика линейной функции.

**Алгоритм построения графика функции $y = kx + b$**

1. Выбрать два различных значения x : x_1 и x_2 .
2. Вычислить значение $y_1 = kx_1 + b$.
3. Вычислить значение $y_2 = kx_2 + b$.
4. Отметить на координатной плоскости Oxy точку A с координатами $(x_1; y_1)$.
5. Отметить на координатной плоскости Oxy точку B с координатами $(x_2; y_2)$.
6. Через точки A и B провести прямую.

Отметим, что данный алгоритм построения графика линейной функции может использоваться при любых k и b . А значит, с его помощью может быть построен и график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$ (случай, когда $b = 0$), и график прямой $y = b$ (случай, когда $k = 0$).

К

141

1) Из приведенных ниже функций выберите те, которые являются прямой пропорциональностью:

$$y = 4x - 2; \quad y = -\frac{x}{3}; \quad y = 5x^2; \quad y = 9 : x; \quad y = x; \quad y = -x + 1; \quad y = 2x.$$

2) Для каждой из выбранных функций назовите коэффициент пропорциональности и опишите особенности расположения ее графика на координатной плоскости. Постройте все данные графики на одной координатной плоскости и проверьте правильность своих рассуждений.

142

1) а) На овощной базе было 5 т картофеля. Ежедневно на базу привозили по 2 т картофеля. Запишите формулу зависимости количества картофеля на базе в тоннах от количества дней завоза картофеля.

б) После того как Михаил прошел 4 км, он пошел со скоростью 3 км/ч. Запишите формулу зависимости длины пути в километрах, пройденного Михаилом, от времени его движения со скоростью 3 км/ч (в часах).

в) До начала наполнения бассейна в нем было 3 м³ воды. После включения насоса в него ежечасно стало поступать 0,5 м³ воды. Запишите формулу зависимости объема воды в бассейне в м³ от времени работы насоса в часах.

г) Температура воды в чайнике равна 20 °С. После того как чайник поставили на огонь, температура воды в нем стала ежеминутно повышаться на 10 °С. Запишите формулу зависимости температуры воды в чайнике в °С от времени его нагревания в минутах.

2) Что общего во всех построенных вами формулах? Запишите их все с помощью одной общей формулы. Является ли эта зависимость функциональной?

3) Рассмотрите частные случаи построенной зависимости, когда один или сразу оба коэффициента равны нулю. Что вы замечаете? Сравните свои наблюдения и выводы с выводами на стр. 36 учебника.

143

Выберите из предложенных зависимостей между переменными y и x линейные функции, запишите их в виде $y = kx + b$ и определите коэффициенты k и b . Найдите область определения и область значений этих функций.

а) $y = -x + 5$;

г) $y = x : 2$;

ж) $y = -8$;

б) $y = 4 - 3x$;

д) $y = 7 : x - 2$;

з) $y = x^2 + 5$;

в) $y = 12x$;

е) $y = 0,5x + 1$;

и) $y = \frac{5 - 8x}{2}$.



144

1) Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = 0,5x$ и $y = 0,5x + 3$. Что вы замечаете? Сопоставьте свои выводы с выводами на стр. 37 учебника.

2) Найдите два способа построения графика линейной функции и примените их для построения графика функции $y = -\frac{x}{3} - 1$.

3) Используя свой опыт построения графика функции $y = -\frac{x}{3} - 1$, составьте общий алгоритм построения графика линейной функции и сравните его с алгоритмом, приведенным на стр. 38 учебника.

145 Линейная зависимость задана аналитически (формулой). Заполните таблицу и постройте ее график. В точках с какими координатами этот график пересекает ось абсцисс, ось ординат? В каких координатных четвертях он расположен?

а) $y = x + 2$

x	0	-4
y		

в) $y = -2x + 3$

x	0	-2
y		

д) $y = 0,4x - 2$

x	0	5
y		

б) $y = -x + 4$

x	0	4
y		

г) $y = 3x - 5$

x	0	2
y		

е) $y = -2\frac{1}{3}x - 4$

x	0	-3
y		

146 Пользуясь формулой, задающей линейную зависимость, заполните пустые клетки таблицы:

а) $y = 3x - 9$

x	-1	
y		-6

б) $y = -6x + 7$

x	2,5	
y		0

в) $y = 0,5x - \frac{2}{3}$

x	1	
y		-2

147 Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = -1$. Составьте таблицу и запишите в ней результаты вычислений.

а) $f(x) = 2x + 7$; в) $f(x) = 9 - 4x$; д) $f(x) = 1,5x - 2$; ж) $f(x) = 6x - 13$;

б) $f(x) = -3x + 8$; г) $f(x) = 0,5x + 3$; е) $f(x) = 11 - 3,5x$; з) $f(x) = 15 - 9x$.

148 Постройте график функции $y = f(x)$. При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

а) $f(x) = x - 2$; б) $f(x) = -2x + 3$; в) $f(x) = -0,5x + 1,5$; г) $f(x) = 0,8x - 4$.

149 Постройте график функции. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = x - 3$; $a = -5$; $b = -2$; в) $f(x) = -0,5x + 4$; $a = -2$; $b = 6$;

б) $f(x) = -2x - 1$; $a = -2$; $b = 5$; г) $f(x) = 1,5x + 2$; $a = 4$; $b = -2,5$.

150 Постройте график функции $y = f(x)$, заданной на множестве $a \leq x \leq b$. Отметьте цветным карандашом на оси Ox область определения, а на оси Oy — область значений данной функции.

а) $f(x) = 4x + 3$, если $a = -2$, $b = 1$; в) $f(x) = -3x + 1$, если $a = -2$, $b = 3$;

б) $f(x) = 5 - 2x$, если $a = -1$, $b = 5$; г) $f(x) = 0,5x + 2$, если $a = -4$, $b = 2$.

151 Постройте на одной координатной плоскости графики трех данных функций. Что вы замечаете?

а) $y = -x$; $y = -x + 1$; $y = -x - 2$; б) $y = 2x$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 4$.

Определите по графикам, на сколько единиц изменяется (уменьшается или увеличивается) значение функции, если значение аргумента увеличивается на 1, уменьшается на 2.

- 152** 1) Как расположены относительно прямой $y = 5x$ графики функций:

$$y = 5x - 1; \quad y = 5x + 2; \quad y = 5x - 6; \quad y = 5x + 4?$$

- 2) Как расположены относительно прямой $y = -7x$ графики функций:

$$y = 6 - 7x; \quad y = -7x - 9; \quad y = -7x + 11; \quad y = -3 - 7x?$$

- 153** 1) Как по графику функции $y = kx$ найти значение коэффициента k ?

- 2) Проанализируйте взаимное расположение графиков линейных функций на рис. 11 и задайте данные функции аналитически (формулами).

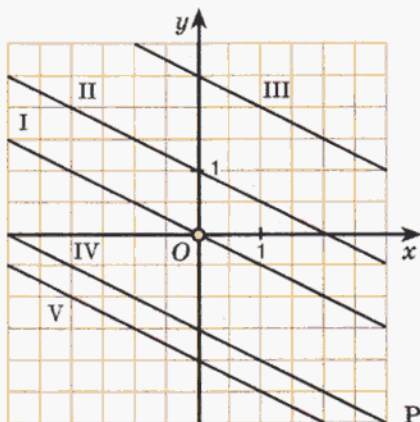


Рис. 11

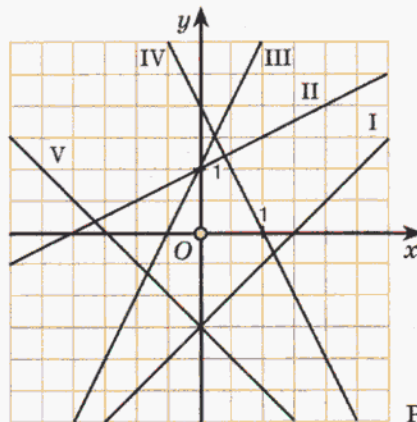


Рис. 12

- 154** Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$. Используя полученный график, построьте график линейной зависимости $y = kx + b$, если:

- а) $k = 1, b = -4$; в) $k = -3, b = 2$; д) $k = 4, b = -2$;
б) $k = 0,5, b = 6$; г) $k = -1, b = -3$; е) $k = -1,5, b = 8$.

Определите по графикам, на сколько единиц изменяется значение функции, если значение аргумента увеличивается на 2, уменьшается на 1.

- 155** Задайте формулой каждую из функций, графики которых представлены на рис. 12.

- 156** Не строя графика функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку А.

- а) $f(x) = -6x - 11, A(-2; 1)$; в) $f(x) = 2,8x + 10, A(5; 4)$;
б) $f(x) = -7x + 30, A(-4; 2)$; г) $f(x) = -5 + 9x, A(6; 49)$.

- 157** При каких значениях b график функции $y = 3x + b$ проходит через точку А?

- а) $A(1; 4)$; б) $A(-1; -5)$; в) $A(2; 12)$; г) $A(-3; 0)$.

- 158** Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy .

- а) $f(x) = 2x + 12$; в) $f(x) = 2,8x - 7$; д) $f(x) = 1,1x + 4,4$;
б) $f(x) = -3x + 21$; г) $f(x) = -6x - 4,2$; е) $f(x) = -15x - 4,5$.

- 159** На одной координатной плоскости Oxy постройте графики линейных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найдите координаты их точки пересечения.

- а) $f(x) = 2x - 1, g(x) = -x + 2$; в) $f(x) = -x + 3, g(x) = 1,5x - 2$;
б) $f(x) = 6 - 3x, g(x) = 2x - 4$; г) $f(x) = -0,5x + 1, g(x) = -5 - 2x$.

- 160** Постройте график функции $y = 2x - 4$ и определите по графику, как изменяется значение функции y , когда:
- а) x возрастает от 2 до 5; в) x убывает от 3 до -2;
 б) x убывает от 1 до -1; г) x возрастает от -3 до 4.
- 161** В одной координатной плоскости постройте графики линейных функций:
- а) $y = 2$; $y = -1$; $y = 5$; $y = -1,7$; $y = 0$; б) $y = 1$; $y = 4,2$; $y = -3,6$; $y = -2,5$.
- Для каждой функции определите значения коэффициентов k и b .
- 162** Найдите три точки, принадлежащие графику функции $y = f(x)$, координаты которых являются целыми числами.
- а) $f(x) = 0,5x + 1,5$; б) $f(x) = 4,2x - 3,6$; в) $f(x) = 2,7x + 8,1$.
- 163** В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx + b$, если:
- а) $k > 0, b > 0$; в) $k < 0, b > 0$; д) $k > 0, b = 0$; ж) $k = 0, b > 0$;
 б) $k > 0, b < 0$; г) $k < 0, b < 0$; е) $k < 0, b = 0$; з) $k = 0, b < 0$.
- 164** Определите знаки k и b , если график линейной функции $y = kx + b$ расположен в следующих четвертях координатной плоскости:
- а) в I, II и III четвертях; в) в I, III и IV четвертях;
 б) в I, II и IV четвертях; г) во II, III и IV четвертях.
- 165** Может ли график линейной функции располагаться на координатной плоскости только:
- а) в I и II четвертях; в) в I и IV четвертях; д) во II и IV четвертях;
 б) в I и III четвертях; г) во II и III четвертях; е) в III и IV четвертях?
- 166** В таблице значений некоторой линейной функции два из пяти значений заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их.
- а)

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-2	-1	4	1

 б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	7	-2	-1	5
- 167** Постройте на одной координатной плоскости Oxy графики:
 $y = 4x$; $y = 2 - 5x$; $y = 4x - 3$; $y = -2 - 5x$; $y = 4x + 3$; $y = -5x$.
 Какие из этих прямых пересекаются? Какие прямые параллельны друг другу?
- π** **168** Вычислите рациональным способом:
- а) $2\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{12}$; в) $3\frac{9}{14} \cdot 7 + 2\frac{5}{18} \cdot 9$; д) $35\frac{5}{6} : 5 + 42\frac{7}{12} : 7$;
 б) $5\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6} - 1\frac{5}{18}$; г) $7\frac{4}{5} \cdot 5 - 6\frac{9}{16} \cdot 8$; е) $54\frac{9}{10} : 9 - 72\frac{8}{15} : 8$.
- 169** Используя диаграммы Эйлера-Венна, определите правильность логического вывода:
- а) Если некоторые решения уравнения $3x + 5 = 0$ отрицательные числа, то некоторые отрицательные числа – решения уравнения $3x + 5 = 0$.

б) Если все решения неравенства $x - 2 > 0$ положительные числа и некоторые положительные числа – четные, то некоторые четные числа – решения неравенства $x - 2 > 0$.

в) Если ни одно решение уравнения $(x - 3)(x + 5)(x - 7) = 0$ не является четным числом, а некоторые четные числа делятся на 9, значит, некоторые делящиеся на 9 числа не являются решением уравнения $(x - 3)(x + 5)(x - 7) = 0$.

г) Если ни одно решение неравенства $x + 7 < 0$ не является положительным числом, то ни одно положительное число не является решением неравенства $x + 7 < 0$.

170 Выберите признак и проведите классификацию множества A по данному признаку (разбейте A по этому признаку на непересекающиеся подмножества, объединением которых является все множество A):

а) $A = \{-2; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 8\}$; б) $A = \{-45; -36; -15; 18; 24; 25\}$.

171 Проведите классификацию множества A по остаткам от деления его элементов на b :

а) $A = \{-14; -12; -9; -4; 5; 18; 21\}$, $b = 4$; б) $A = \{-7; -6; 2; 4; 11; 21; 28\}$, $b = 3$.

172 Запишите в стандартном виде многочлен, противоположный данному:

а) $2a + 3b + 4c + (2b - 3c + 4d) - (2c + 3d - 4a)$;

б) $4,25p^2q - 3,75pq^2 - (-1,3pq^2 + 2,8p^2q)$;

в) $3m^2 - 1 + (6m^4 - 5m^2 + 2) - (2m^4 - 3m^2 - 5)$;

г) $0,75y^2 + (0,75xy^2 - 0,8yx^2 - 1,2y^2) - (0,3xy^2 - 0,2yx^2 + 0,25xy^2)$.

173 Найдите сумму многочленов P и Q и запишите получившийся многочлен в стандартном виде:

а) $P = 2,1x^3 + 3 + (6 - 4x^3)$, $Q = (0,5x^3 + 0,4x^2) - (0,4x^3 - 0,5x^2)$;

б) $P = 0,2a^2 + 0,25b^2 - (5,1a^2 + 0,5b^2)$, $Q = (0,6a^2 + 0,7b^2) + (0,4a^2 - 0,3b^2)$;

в) $P = 5p^2 + 6pq + 4q^2 - (7p^2 + 3pq + 5q^2)$, $Q = 4p^2 - 6pq + 9q^2 + (-3p^2 + 7pq - 8q^2)$;

г) $P = 3x^2y + 3y^2x - 3y^3 - (2x^2y + y^2x - 2y^3)$, $Q = 6x^2y + 7y^2x - 9y^3 - (5x^2y + 7y^2x - 6y^3)$.

174 Решите уравнение:

а) $x + \frac{2x - 7}{2} - \frac{3x + 1}{5} = 5 - \frac{x + 6}{2}$;

в) $\frac{x - 4}{5} + \frac{3x - 2}{10} = \frac{2x + 1}{3} - 7$;

б) $\frac{2y - 5}{6} + \frac{y + 2}{4} = \frac{5 - 2y}{3} - \frac{6 - 7y}{4} - y$;

г) $\frac{4y}{3} - 17 + \frac{3y - 17}{4} = \frac{y + 5}{2}$.

175 а) Смешали 300 г воды и 60 г соли. Сколько воды надо добавить к этому раствору, чтобы получить раствор, концентрация соли в котором 10%?

б) Смешали 30 л 45%-го раствора кислоты с 10 л 60%-го раствора той же кислоты. Определите процентную концентрацию кислоты в получившемся растворе.

в) Сумма двух рациональных чисел равна 2490. Найдите эти числа, если 6,5% одного из них равны 8,5% другого.

г) Разность двух рациональных чисел равна 438. Найдите эти числа, если 2,25% одного из них равны 8% другого.

176 Решите уравнение:

а) $3|x - 2| + 5|x - 4| = 10$; б) $6|x + 4| + 7|x - 3| = 15$.

177 Определите, какой цифрой оканчивается число:

а) $918^{819^{18}}$; б) $676^{676^{21}}$.

Д **178** Линейная зависимость задана аналитически (формулой). Заполните таблицу и постройте ее график. В каких точках этот график пересекает ось абсцисс, ось ординат? В каких координатных четвертях он расположен?

а) $y = -x - 2$

x	0	-3
y		

б) $y = 2x - 5$

x	0	3
y		

в) $y = -0,6x + 4$

x	0	-5
y		

179 Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, $f(x) = -2$. Составьте таблицу и запишите в ней результаты вычислений.

а) $f(x) = 6x - 8$;

б) $f(x) = -0,4x + 2$;

в) $f(x) = -3x - 7$.

180 Постройте график функции $y = f(x)$. При каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля?

а) $f(x) = x + 3$;

б) $f(x) = -2x - 4$;

в) $f(x) = 0,5x + 2$.

181 Постройте график функции. Найдите по графику: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = -3x - 6$; $a = -3$; $b = 9$;

б) $f(x) = 1,5x + 5$; $a = -4$; $b = 11$.

Проверьте точность своих ответов с помощью вычислений.

182 Постройте график функции $y = f(x)$, заданной на множестве $a \leq x \leq b$. Отметьте цветным карандашом на оси Ox область определения, а на оси Oy — область значений данной функции.

а) $f(x) = -x + 1$, если $a = -4$, $b = 3$;

б) $f(x) = 1,2x - 3$, если $a = -5$, $b = 0$.

183 Не строя график функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку A .

а) $f(x) = 6x - 7$, $A(3; -11)$;

в) $f(x) = -3x + 12$, $A(-5; -3)$;

б) $f(x) = 4,2x + 3$, $A(1; 7,2)$;

г) $f(x) = -9x - 7$, $A(-6; -47)$.

184 Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$. Используя полученный график, постройте график линейной зависимости $y = kx + b$, если:

а) $k = -2$, $b = 1$; б) $k = 1$, $b = 4$; в) $k = -\frac{2}{3}$, $b = -3$; г) $k = 0$, $b = 2$.

185 При каких значениях b график функции $y = -2x + b$ проходит через данную точку?

а) $A(1; 2)$;

б) $B(-1; -4)$;

в) $C(2; 3)$;

г) $D(-2,5; 0)$.

186 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :

а) $f(x) = 3x + 15$;

б) $f(x) = 3,2x - 16$;

в) $f(x) = 1,3x + 3,9$.

187 В таблице значений некоторой линейной функции два из пяти значений заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их.

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	-13	5	-3	-2	7

б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	-2	5	4	11

188 Используя диаграммы Эйлера–Венна, определите правильность логического вывода:

а) Если некоторые решения уравнения $9x - 3 = 0$ положительные числа, то некоторые положительные числа – решения уравнения $9x - 3 = 0$.

б) Если все решения неравенства $x + 3 < 0$ отрицательные числа и некоторые отрицательные числа – нечетные, то некоторые нечетные числа – решения неравенства $x + 3 < 0$.

в) Если ни одно решение уравнения $(x - 4)(x + 6)(x - 8) = 0$ не является нечетным числом, а некоторые нечетные числа делятся на 5, значит, некоторые делящиеся на 5 числа не являются решением уравнения $(x - 4)(x + 6)(x - 8) = 0$.

г) Если ни одно решение неравенства $x - 9 > 0$ не является отрицательным числом, то ни одно отрицательное число не является решением неравенства $x - 9 > 0$.

189 Проведите классификацию множества A по остаткам от деления его элементов на b :

а) $A = \{-9; -7; -5; -3; 4; 15; 23\}$, $b = 5$; б) $A = \{-7; -5; 0; 6; 14; 37; 42\}$, $b = 3$.

190 Найдите сумму многочленов P и Q и запишите ее как многочлен стандартного вида:

а) $P = 4a^2 - 7 + (8 - 2a^2)$, $Q = (7a + 4a^2) - (4a - 7a^2)$;

б) $P = 3b^2 + 4bc - (3b^2 - 2bc - 4b^2)$, $Q = -5b^2 - 3bc + (9b^2 - 7bc - 5b^2)$.

191 Решите уравнение:

а) $\frac{3x-2}{11} - \frac{x}{3} = \frac{3x-5}{7} - \frac{5x-3}{9}$; б) $\frac{5y+1}{6} + \frac{3y-1}{5} = \frac{9y+1}{8} - \frac{1-y}{3}$.

192 а) Для приготовления глазури для пончиков в пончиковой компании Антона и Ксюши смешали 500 кг воды и 200 кг сахара. Сколько воды надо добавить к этому раствору, чтобы получить раствор, концентрация сахара в котором 5%?

б) Сумма выручек двух филиалов пончиковой компании Антона и Ксюши за март была равна 765 тыс. р. Найдите выручку каждого из этих филиалов, если известно, что 15% выручки одного филиала равно 10% от выручки другого.

193 Решите уравнение: $7|x+4| - 9|x-7| = 21$.

194 Определите, какой цифрой оканчивается число: $217^{712^{31}}$.

195 Постройте график функции $y = Ax + B$, где

$$A = (0,1955 + 0,187) : 0,085 + 15,76267 : (100,6 + 42,697) - 1,51;$$

$$B = (86,9 + 667,6) : (37,1 + 13,2) : 3 + (9,09 - 9,0252) \cdot (25,007 - 12,507) - 0,81.$$

196 ^{*} Докажите, что среди любого количества людей в некотором зале хотя бы двое имеют одинаковое число знакомых среди присутствующих.

3. Кусочно-линейные функции



Математика – это то, посредством чего люди управляют природой и собой.

Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987),
русский математик, один из основоположников
современной теории вероятностей

В предыдущем пункте мы познакомились с линейной функцией $y = kx + b$, где k и b – некоторые числа, научились строить ее график. При этом процессы, которые описывает данная функция, характеризовались двумя постоянными величинами k и b , которые не меняли своих значений на всей области определения линейной функции (множестве всех известных нам чисел).

Однако на практике цены на товары, скорость движения автомобиля и другие величины обычно со временем меняются, поэтому для описания таких процессов нам нужны будут уже другие функции. Тем не менее, если в течение некоторых промежутков времени данные величины k и b все же сохраняют свое постоянное значение, процесс на каждом из этих промежутков остается линейным, и поэтому он может быть описан целиком так называемой *кусочно-линейной* функцией.

Для того чтобы пояснить сказанное, рассмотрим следующую задачу.

Задача. Пешеход вышел из пункта A и в течение первых двух часов шел со скоростью 3 км/ч. Затем он остановился у кафе и обедал в течение часа, а потом продолжил путь и следующие 2,5 часа шел со скоростью 4 км/ч. Запишите формулу зависимости пути пешехода s (в километрах) от времени его движения t (в часах) и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ost .

Решение:

Формула зависимости пути s пешехода от времени движения t позволит нам определить, какой путь он прошел в каждый указанный в задаче момент времени.

Для того чтобы вывести данную формулу, разобьем все время движения пешехода на три временных промежутка, на каждом из которых его скорость была постоянной и, значит, процесс движения был линейным:

- 1) движение в течение первых 2 часов: $0 \leq t \leq 2$;
- 2) обед – отсутствие движения, или движение со скоростью 0 км/ч: $2 < t \leq 3$;
- 3) движение в течение следующих двух с половиной часов: $3 < t \leq 5,5$.

Далее для каждого промежутка построим формулы зависимости пути s км от времени движения t ч и вычислим пройденный путь:

№	Время движения	Скорость движения	Формула зависимости пути s км от времени движения t ч	Путь, пройденный в конце данного промежутка времени
1	$0 \leq t \leq 2$	3 км/ч	$3t$	$3 \cdot 2 = \underline{6}$ (км)
2	$2 < t \leq 3$	0 км/ч	$\underline{6} + 0 \cdot (t - 2) = 6$	$\underline{6}$ (км)
3	$3 < t \leq 5,5$	4 км/ч	$\underline{6} + 4(t - 3) = 6 + 4t - 12 = 4t - 6$	$4 \cdot 5,5 - 6 = 22 - 6 = \underline{16}$ (км)

Таким образом, зависимость пути s (в километрах), пройденного пешеходом, от времени его движения t (в часах) может быть записана на каждом временном интервале с помощью своей линейной функции:

1) $s = 3t$ – линейная функция, область определения которой состоит из всех значений t , удовлетворяющих неравенству $0 \leq t \leq 2$;

2) $s = 6$ – линейная функция с областью определения $2 < t \leq 3$;

3) $s = 4t - 6$ – линейная функция с областью определения $3 < t \leq 5,5$.

Зависимости такого рода обычно записывают короче:

$$s(t) = \begin{cases} 3t, & \text{если } 0 \leq t \leq 2; \\ 6, & \text{если } 2 < t \leq 3; \\ 4t - 6, & \text{если } 3 < t \leq 5,5. \end{cases}$$

Полученная зависимость s от t определена на множестве $0 \leq t \leq 5,5$, являющемся объединением всех трех рассмотренных временных промежутков. Областью ее значений являются все значения s , удовлетворяющие неравенству $0 \leq s \leq 16$. И так как каждому значению t из области определения ставится в соответствие единственное значение s из области ее значений, то данная зависимость является функцией.

Вместе с тем данная функция не является линейной, так как на всей области определения она не может быть представлена в виде $s = kt + b$, где k и b – некоторые числа. Но на каждом ее «куске», то есть промежутке времени, на котором тип движения не меняется, функция является линейной, поэтому ее и называют *кусочно-линейной*.

Для того чтобы дать точное определение кусочно-линейной функции, нам необходимо вначале уточнить понятие **числового промежутка** – множества чисел, удовлетворяющих некоторому неравенству.

Составим таблицу, в которой рассмотрим все типы числовых промежутков, их названия, обозначения и геометрическое представление с помощью числовой прямой.

Числовые промежутки

Название	Тип неравенства	Множество точек числовой прямой	Обозначение
Открытый луч	$x > 5$		$(5; +\infty)$
Замкнутый луч	$x \geq 5$		$[5; +\infty)$
Интервал	$2 < x < 5$		$(2; 5)$
Полуинтервал	$2 < x \leq 5$		$(2; 5]$
Отрезок	$2 \leq x \leq 5$		$[2; 5]$

Заметим, что новым для нас в этой таблице является лишь название числовых промежутков. Их обозначение: знаки $+\infty$ и $-\infty$ обозначают соответственно плюс бесконечность и минус бесконечность, круглая скобка говорит о том, что числовой промежуток является *открытым* (соответствующая точка ему не принадлежит), а квадратная – о том, что он *замкнутый* (соответствующая точка ему принадлежит).

Теперь, систематизировав информацию о числовых промежутках, дадим определение кусочно-линейной функции.

Определение. Если область определения функции может быть разбита на конечное число непересекающихся числовых промежутков, объединение которых дает всю область определения, и на каждом из этих промежутков функция линейная, то такая функция называется **кусочно-линейной**.

Пользуясь определением и алгоритмом построения графика линейной функции, запишем алгоритм построения графика кусочно-линейной функции.

Алгоритм построения графика кусочно-линейной функции $y = f(x)$

- 1) Выделить непересекающиеся числовые промежутки, составляющие всю область определения функции, на каждом из которых функция является линейной.
- 2) Для каждого числового промежутка выбрать два значения x , принадлежащих ему.
- 3) Вычислить значения y , соответствующие выбранным значениям x .
- 4) Записать выбранные значения x и вычисленные значения y как упорядоченные пары – координаты точек, принадлежащих графику $y = f(x)$.
- 5) Построить на координатной плоскости Oxy полученные точки;
- 6) Для каждого числового промежутка провести через построенные точки, соответствующую часть прямой – график $y = f(x)$ на этом промежутке.

Построим теперь с помощью данного алгоритма на координатной плоскости Ost график нашей зависимости s от t :

$$s(t) = \begin{cases} 3t, & \text{если } 0 \leq t \leq 2; \\ 6, & \text{если } 2 < t \leq 3; \\ 4t - 6, & \text{если } 3 < t \leq 5,5. \end{cases}$$



1. Областью определения T функции $s(t)$ является множество всех t , для которых $0 \leq t \leq 5,5$. Значит, $T = [0; 5,5]$.

Вся область определения T разбита на 3 числовых промежутка:

$$T_1 = [0; 2], \quad T_2 = (2; 3], \quad T_3 = (3; 5,5].$$

При этом:

$$T_1 \cap T_2 = \emptyset; \quad T_1 \cap T_3 = \emptyset; \quad T_2 \cap T_3 = \emptyset; \quad T_1 \cup T_2 \cup T_3 = T.$$

2. Выбираем для каждого промежутка T_1 , T_2 и T_3 принадлежащие ему два значения t :

$$1) t_1 = 0; t_2 = 2; \quad 2) t_3 = 2,5; t_4 = 3; \quad 3) t_5 = 4; t_6 = 5,5.$$

3. Вычислим значения функции $s(t)$ в выбранных точках:

$$\begin{array}{lll} 1) s_1 = 3 \cdot 0 = 0; & 2) s_3 = 6; & 3) s_5 = 4 \cdot 4 - 6 = 10; \\ s_2 = 3 \cdot 2 = 6; & s_4 = 6; & s_6 = 4 \cdot 5,5 - 6 = 16. \end{array}$$

4. Запишем координаты точек, принадлежащих графику функции $s(t)$:

$$1) A_1(0; 0); A_2(2; 6); \quad 2) B_1(2,5; 6); B_2(3; 6); \quad 3) C_1(4; 10); C_2(5,5; 16).$$

5. Построим на координатной плоскости Ost полученные точки.

6. Для каждого числового промежутка проводим через построенные две точки соответствующую часть прямой – график функции $s(t)$ на этом промежутке (рис. 13).

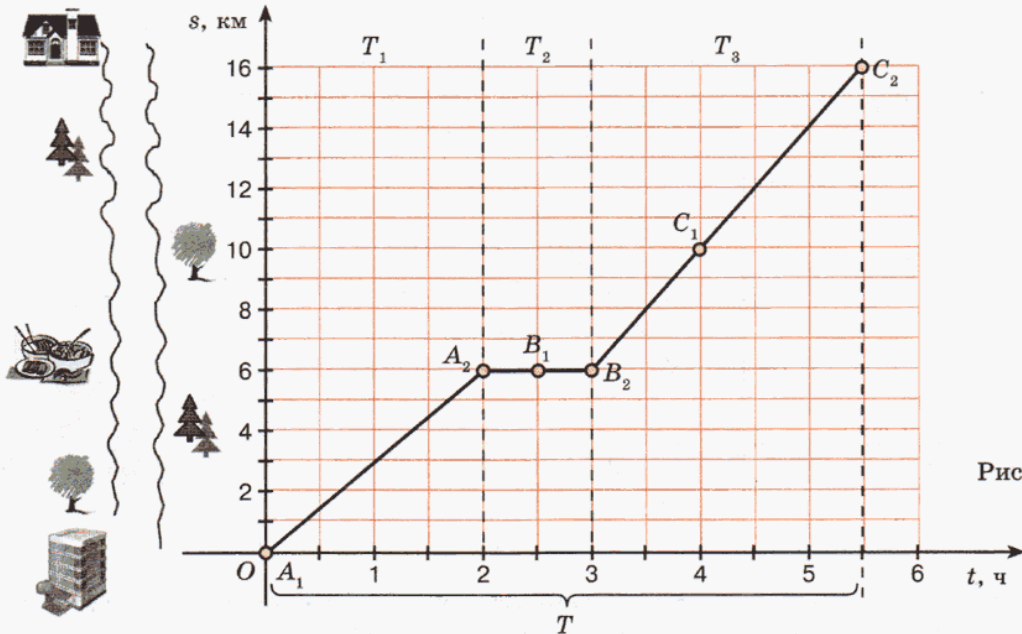


Рис. 13

Таким образом, наша задача полностью решена.

Рассмотрим еще один пример кусочно-линейной функции – зависимость $y = |x|$.

Вспомним определение модуля числа, докажем, что данная зависимость является функцией, и построим график этой функции.

По определению, модуль числа x равен x при $x \geq 0$ и равен $-x$ при $x < 0$. Значит, согласно определению, мы можем записать зависимость $y = |x|$ в виде:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Данная зависимость каждому числу x ставит в соответствие единственное число y . Значит, эта зависимость является функцией, областью определения X которой является множество всех известных нам чисел. А так как модуль числа всегда больше или равен нулю, то областью значений Y этой функции являются все известные нам неотрицательные числа:

$$X = (-\infty; +\infty), \quad Y = [0; +\infty).$$

Для того чтобы построить график функции $y = |x|$, воспользуемся нашим алгоритмом.

1. Разобьем область определения X на два промежутка: $x < 0$ и $x \geq 0$:

$$X_1 = (-\infty; 0), \quad X_2 = [0; +\infty).$$

При этом: $X_1 \cap X_2 = \emptyset$; $X_1 \cup X_2 = X$.

2. Выберем для каждого числового промежутка X_1 и X_2 по два принадлежащих ему значения x :

$$1) x_1 = -1; x_2 = -2; \quad 2) x_3 = 0; x_4 = 1.$$

3. Вычислим значения y , соответствующие выбранным значениям x :

$$1) y_1 = -(-1) = 1; y_2 = -(-2) = 2; \quad 2) y_3 = 0; y_4 = 1.$$

4. Запишем координаты точек, принадлежащих графику функции $y = |x|$:

$$1) A_1(-1; 1); A_2(-2; 2); \quad 2) B_1(0; 0); B_2(1; 1).$$

5. Построим на координатной плоскости Oxy полученные точки.

6. Для каждого числового промежутка проводим через две точки часть прямой – график $y = |x|$ на этом промежутке (рис. 14).

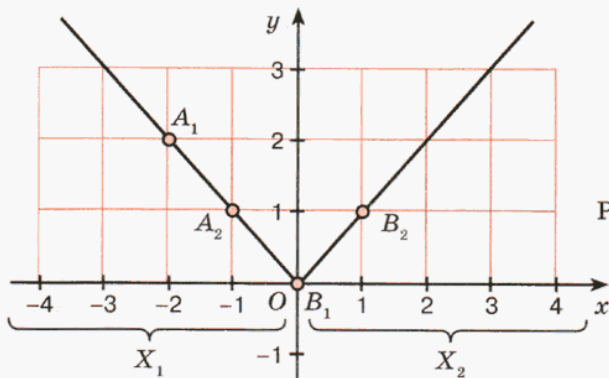
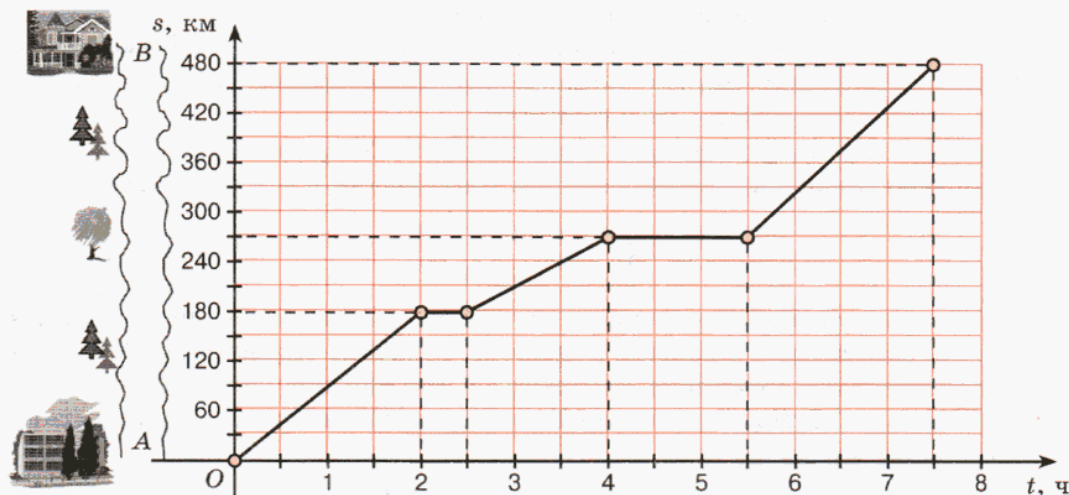


Рис. 14



197 На рисунке изображен график движения автомобилиста по дороге из пункта А в пункт В. Пользуясь графиком, ответьте на вопросы:



- Чему равно расстояние от А до В? За сколько времени автомобилист проехал этот путь?
- Сколько остановок он сделал в пути? На каком расстоянии от пункта А? Чему равна их продолжительность?
- Чему была равна скорость автомобилиста на каждом участке пути? На каком участке она была наибольшей, наименьшей?
- Какой путь проехал автомобилист за первые 3 часа своего пути?
- С какой средней скоростью передвигался автомобилист из А в В?
- Является ли зависимость пути автомобилиста от времени его движения функциональной? Является ли она линейной?

198

1) Пешеход вышел из пункта А и в течение первых двух часов шел со скоростью 3 км/ч. Затем он остановился у кафе и обедал в течение часа, а потом продолжил путь и следующие 2,5 часа шел со скоростью 4 км/ч. Запишите формулу зависимости пути s км пешехода от времени его движения t ч. Является ли данная зависимость функциональной? Является ли она линейной?

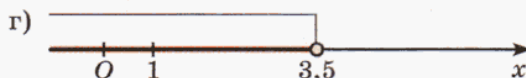
2) Сравните полученную вами формулу зависимости с формулой на стр. 47 учебника. Прочитайте определение кусочно-линейной функции и объясните, почему зависимости подобного вида получили такое название.

3) Используя определение кусочно-линейной функции, данное на стр. 48, запишите алгоритм построения графика кусочно-линейной функции.

4) Сравните полученный вами алгоритм с алгоритмом, приведенным на стр. 48 учебника, и примените его для построения на координатной плоскости Ost графика движения пешехода в рассматриваемой задаче.

199

Используя неравенства, задайте промежутки, изображенные на рисунке. Как называется каждый из этих промежутков? Запишите их обозначения.



200

На числовой прямой Ox изобразите указанные промежутки и запишите их обозначения:

- а) $x < 2$; в) $x \geq 4,5$; д) $-5,4 \leq x \leq -2,3$; ж) $-7,6 < x \leq -0,9$;
 б) $x > -3$; г) $x \leq 6,7$; е) $3,1 < x < 7,4$; з) $-1,2 \leq x < 6,3$.

201

Какие из чисел a , b , c и d расположены в указанном промежутке?

- а) $-6,3 \leq x \leq 2,1$, $a = -7$, $b = -6$, $c = 0$, $d = 2,4$;
 б) $-7 \leq x < 0$, $a = -7$, $b = -4$, $c = 0$, $d = 1$;
 в) $5 < x \leq 11,5$, $a = 5$, $b = 9$, $c = 11$, $d = 12$;
 г) $1 < x < 7$, $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$.



202

Постройте график кусочно-линейной функции:

а)
$$y = \begin{cases} x + 2, & \text{если } x \geq -3; \\ -x - 4, & \text{если } x < -3 \end{cases}$$

б)
$$y = \begin{cases} 3, & \text{если } x \geq -1; \\ 1 - 2x, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$

в)
$$y = \begin{cases} 5, & \text{если } x \geq 3; \\ \frac{4}{3}x + 1, & \text{если } x < 3 \end{cases}$$

г)
$$y = \begin{cases} -x + 6, & \text{если } x \geq 4; \\ 2, & \text{если } 1 \leq x < 4; \\ 2x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

$$д) \quad y = \begin{cases} 3, & \text{если } x \geq 3; \\ x, & \text{если } -1 \leq x < 3; \\ -1, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$

$$е) \quad y = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \geq -1; \\ 2x + 4, & \text{если } -2 \leq x < -1; \\ -x - 2, & \text{если } x < -2. \end{cases}$$

203 Принадлежат ли графику кусочно-линейной функции точки A и B , если:

$$а) \quad y = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x \geq 0,5; \\ 1 - 2x, & \text{если } x < 0,5 \end{cases} \quad A(1; 1), B(-4; -9);$$

$$б) \quad y = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \geq 0; \\ 1 - x, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad A(2; 3), B(-5; -4);$$

$$в) \quad y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \geq 0; \\ -x - 1, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad A(5; 4), B(-7; 6);$$

$$г) \quad y = \begin{cases} 3x - 6, & \text{если } x \geq 2; \\ 6 - 3x, & \text{если } x < 2 \end{cases} \quad A(4; -6), B(-2; 12);$$

$$д) \quad y = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 1; \\ 2 - x, & \text{если } x < 1 \end{cases} \quad A(3; 3), B(-2; -2);$$

$$е) \quad y = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x \geq 0; \\ -2x - 1, & \text{если } x < 0 \end{cases} \quad A(0; 1), B(-4; -9).$$



Постройте графики этих функций.

204 а) Туристы в течение первых 4 часов похода шли со скоростью 5 км/ч. После этого они сделали привал и отдыхали в течение 1 часа. Следующие 3 часа после привала они шли со скоростью 4 км/ч. Запишите формулу зависимости пути s туристов в км от времени их движения t в часах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ost .

б) Бассейн в течение первых 2 часов наполнялся со скоростью 2 м³ в час. В течение следующих 3 часов скорость наполнения увеличили до 4 м³ в час, а последние 2 часа он наполнялся со скоростью 5 м³ в час. Запишите формулу зависимости объема воды в бассейне V в м³ от времени его наполнения t в часах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости OVt .

в) В течение первых 3 часов своего рабочего дня рабочий выпускал детали со скоростью 6 деталей в час. Затем, поняв, как ускорить выпуск, он в течение двух часов до обеденного перерыва выпускал 10 деталей в час. Обеденный перерыв длился час, а после обеда рабочий в течение 3 часов выпускал детали со скоростью 8 деталей в час. Запишите формулу зависимости количества выпущенных рабочим деталей n от времени его работы t в часах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ont .

г) Температура воздуха в сауне до нагревания была равна 20 °С. После того как воздух в сауне начали нагревать, температура его повышалась в течение первых 10 минут на 2 °С в минуту, а в течение следующих 15 минут – на 3 °С в минуту. Запишите формулу зависимости температуры воздуха в сауне T в °С от времени его нагревания t в минутах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости OTt .

205 Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(4)$, $f(-5)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 5$, $f(x) = -4$. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \geq 1; \\ 1 - x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 1 - x, & \text{если } x \geq -1; \\ x + 3, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x \geq -3; \\ -3 - x, & \text{если } x < -3 \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x \geq -2; \\ -4 - 3x, & \text{если } x < -2 \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 2x - 2, & \text{если } x \geq 1; \\ 2 - 2x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$

е) $y = \begin{cases} 2x + 4, & \text{если } x \geq -1,5; \\ -2x - 2, & \text{если } x < -1,5 \end{cases}$

206 Постройте график кусочно-линейной функции. Определите по графику, при каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля.

а) $y = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \geq 1; \\ 2, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -2x, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} 2x - 1, & \text{если } x \geq 3; \\ x + 2, & \text{если } -2 \leq x < 3; \\ 4 + 0,5x, & \text{если } x < -2 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 2x + 4, & \text{если } x \geq 0; \\ 2, & \text{если } -1 \leq x < 0; \\ x + 3, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

д) $y = \begin{cases} 3x - 3, & \text{если } x \geq 2; \\ x + 1, & \text{если } 0,5 \leq x < 2; \\ 3 - 3x, & \text{если } x < 0,5 \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} -x, & \text{если } x \geq 3; \\ 12 - 5x, & \text{если } 2 \leq x < 3; \\ -x + 4, & \text{если } x < 2 \end{cases}$

е) $y = \begin{cases} 4, & \text{если } x \geq 0,5; \\ 4x + 2, & \text{если } -1,5 \leq x < 0,5; \\ -5, & \text{если } x < -1,5 \end{cases}$

207 Постройте график функции $y = f(x)$. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = |x - 4|$, $a = 3$; $b = 5$;

г) $f(x) = 2|x| - 5$, $a = -8$; $b = -1$;

б) $f(x) = |x + 1| - 1$, $a = -2$; $b = 6$;

д) $f(x) = |x - 9| + 1$, $a = 1$; $b = 0$;

в) $f(x) = |3 - x|$, $a = -7$; $b = 1$;

е) $f(x) = |1 - x| + x$, $a = -6$; $b = -4$.

208 Определите, не строя график функции $y = f(x)$, проходит ли он через точку A .

а) $f(x) = |4x - 5|$, $A(1; 1)$;

г) $f(x) = |6x + 9| - x$, $A(-4; 19)$;

б) $f(x) = |4 - 7x| + 1$, $A(2; 11)$;

д) $f(x) = 2x - |3x + 5|$, $A(-3; -2)$;

в) $f(x) = |9x - 8| + 3$, $A(0; 5)$;

е) $f(x) = x + 2 - |2x + 7|$, $A(-1; -2)$.

209 При каких значениях b график функции $y = |5x + b|$ проходит через точку A ?

а) $A(1; 6)$;

б) $A(-1; -3)$;

в) $A(2; 7)$;

г) $A(-3; 4)$.

210 Определите, какие из точек A , B , C и D принадлежат графику функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |3x - 5|$, $A(0; -5)$, $B(1; 2)$, $C(-1; 8)$, $D(-2; -11)$;

б) $f(x) = -|x + 7|$, $A(0; -7)$, $B(2; 9)$, $C(-1; -6)$, $D(-2; -5)$;

в) $f(x) = 2|x - 0,5|$, $A(0; -1)$, $B(1; 1)$, $C(-1; 3)$, $D(-0,5; 0)$;

г) $f(x) = -|5x - 2|$, $A(0; 2)$, $B(-1; -7)$, $C(1; 3)$, $D(2; -8)$.

211 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :

- а) $f(x) = |x + 3|$; в) $f(x) = |x + 1| + 5$; д) $f(x) = |x + 6| + 2$;
 б) $f(x) = |x - 2| + 1$; г) $f(x) = -2|x - 4| - 6$; е) $f(x) = -|x - 7| - 4$.

212 Постройте график кусочно-линейной функции:

- а) $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \geq 2; \\ x, & \text{если } 0 \leq x < 2; \\ -x, & \text{если } -2 \leq x < 0; \\ 3, & \text{если } x < -2 \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} -1, & \text{если } x \geq 3; \\ 5 - 2x, & \text{если } 0,5 \leq x < 3; \\ 2x + 3, & \text{если } -1 \leq x < 0,5; \\ 4, & \text{если } x < -1 \end{cases}$
 б) $y = \begin{cases} 2x - 5, & \text{если } x \geq 2; \\ -1, & \text{если } 1,5 \leq x < 2; \\ 5 - 4x, & \text{если } 0 \leq x < 1,5; \\ 5 + 2x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ д) $y = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \geq 5; \\ 3, & \text{если } -2 \leq x < 5; \\ 2x + 10, & \text{если } -3 \leq x < -2; \\ -2x - 2, & \text{если } x < -3 \end{cases}$
 в) $y = \begin{cases} x + 5, & \text{если } x \geq 2; \\ 2x + 2, & \text{если } 0 \leq x < 2; \\ 2, & \text{если } -2 \leq x < 0; \\ 6 + 2x, & \text{если } -4 \leq x < -2; \\ -x - 6, & \text{если } x < -4 \end{cases}$ е) $y = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x \geq 5; \\ -x + 7, & \text{если } 4 \leq x < 5; \\ x - 1, & \text{если } 3 \leq x < 4; \\ -x + 5, & \text{если } 2 \leq x < 3; \\ x + 1, & \text{если } 1 \leq x < 2; \\ x + 3, & \text{если } x < 1 \end{cases}$

213 Постройте графики функции $y = f(x)$:

- а) $f(x) = |x + 1| - |x - 2|$; д) $f(x) = -|1 - x| - |x - 2|$;
 б) $f(x) = |x - 3| + |1 - x|$; е) $f(x) = |x + 1| - |5 - x|$;
 в) $f(x) = |2 - x| - |3 - x|$; ж) $f(x) = |4 - x| + |3 - x|$;
 г) $f(x) = x + |x + 2| - |x - 1|$; з) $f(x) = |5 + x| - |x - 3|$.

π

214 Прочитайте высказывание и определите, истинно оно или ложно. Если высказывание ложно, постройте его отрицание.

- а) $\forall a, b \in \mathbb{Q}: (a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
 б) $\exists a, b \in \mathbb{Q}: (a - b)^3 = a^3 - b^3$;
 в) $\forall a, b \in \mathbb{Q}: (a - b)^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
 г) $\exists a, b \in \mathbb{Q}: a^2 + b^2 = (a + b)^2$;
 д) $\exists a, b \in \mathbb{Q}: a^2 - b^2 = (a - b)^2$;
 е) $\forall a, b \in \mathbb{Q}: a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)$;
 ж) $\exists a, b \in \mathbb{Q}: a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)$.



215 Вычислите:

- а) $(4,32 \text{ кг} : 1,35 + 1,3 \text{ ц} : 26 - 0,04 \text{ т} \cdot 0,0225) : (10,01 \text{ кг} : 13 - 40 \text{ г})$;
 б) $(0,08 \text{ т} \cdot 0,18 + 0,025 \text{ кг} - 3,05 \text{ кг} : 2) : (1,2 \text{ кг} \cdot 2,7 + 1 \text{ кг } 60 \text{ г})$;
 в) $40 \text{ м} \cdot 0,6 - 40 \text{ см} \cdot (15,8 - 12,3) + 0,0005 \text{ км} \cdot (13,4 + 15,4)$;
 г) $10 \text{ м} \cdot (5,463 - 4,908) + 0,1 \text{ см} \cdot (19,4 - 17,4) - 5 \text{ мм} \cdot (14,7 - 11,6)$.

216 Запишите разность многочленов P и Q как многочлен стандартного вида:

а) $P = 5x^3 + 2xy^2 + 3x$, $Q = 2x^3 + 4xy^2 + 5x$;

б) $P = 9p^2 - 7pq - 6q^2 + (-4p^2 + 5pq + 4q^2)$, $Q = 2p^2 - 2pq - 7q^2$;

в) $P = 6m^2 + 3mn + 2n^2 - (3m^2 + 4mn + 3n^2)$, $Q = 3m^2 - 4mn - n^2$;

г) $P = 5a^2b - 3a^2b^2 - ab^2 - (8a^2b - 2a^2b^2 - 2ab^2)$,
 $Q = 2a^2b + 4a^2b^2 - 2ab^2 - (3a^2b + 4a^2b^2 - 5ab^2)$.

217 Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^{32} \cdot a^{11} \cdot a^{15} \cdot (a^4)^7 \cdot (3a)^{22}}{(3a)^{10} \cdot (a^{64} : a^{21}) \cdot a^{42} \cdot (3a)^{11}} + 5a^0$ при $a = 2$;

б) $\frac{7^{56} \cdot (b^{36} : b^{21}) \cdot c^{15} \cdot c^{39} \cdot (bc)^{24}}{c^{12} \cdot b^{19} \cdot (b^{14} : b^9) \cdot (b^5)^3 \cdot (7c)^{55} \cdot c^{10}} - 9(bc)^0$ при $b = -0,4$; $c = -5$.



218 Не вычисляя остатков, докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c :

а) $a = 59\,615$, $b = 59\,783$, $c = 14$;

в) $a = 151\,213$, $b = 152\,293$, $c = 36$;

б) $a = 98\,516$, $b = 99\,096$, $c = 29$;

г) $a = 214\,329$, $b = 216\,649$, $c = 58$.

219 Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом a по модулю m :

а) $a = 2456$, $m = 7$;

д) $a = -36\,148$, $m = 56$;

б) $a = 76\,513$, $m = 12$;

е) $a = 65\,475$, $m = 79$;

в) $a = 97\,342$, $m = 17$;

ж) $a = -112\,764$, $m = 111$;

г) $a = -34\,952$, $m = 23$;

з) $a = 314\,517$, $m = 213$.

220 Решите уравнение:

а) $x^2 - 36 = 0$;

в) $(5z - 2)^2 - 16 = 0$;

д) $(b + 3)^2 - (3b - 4)^2 = 0$;

б) $121 - y^2 = 0$;

г) $81 - (6a + 5)^2 = 0$;

е) $(2c - 3)^2 - (4c + 5)^2 = 0$.

221 а) В результате переработки молока получают сливки, масса которых составляет $\frac{4}{25}$ от первоначального веса молока. А в результате переработки сливок получают сливочное масло, масса которого равна $\frac{2}{9}$ от первоначальной массы сливок. Сколько надо взять молока, чтобы получить 100 кг сливочного масла?

б) Когда в магазине в течение месяца продали $\frac{5}{12}$ первоначального запаса картофеля, то его осталось на 500 кг больше половины первоначального запаса. Сколько килограммов картофеля продали в этом месяце?

в) В городе N мужчины составляют $\frac{9}{10}$ от числа проживающих там женщин. Какую часть составляют мужчины от всего населения города N ?

222 Решите уравнение:

а) $x^2 - 3x - 18 = 0$;

в) $-z^2 + 10z - 24 = 0$;

д) $b^2 + 4b - 32 = 0$;

б) $y^2 - 2y - 35 = 0$;

г) $a^2 + 12a + 27 = 0$;

е) $c^2 - 4c - 77 = 0$.

223 Найдите три значения x , таких, что:

- а) $x \equiv 3 \pmod{9}$; в) $x \equiv 7 \pmod{12}$; д) $x \equiv 16 \pmod{19}$;
 б) $x \equiv 5 \pmod{11}$; г) $x \equiv 14 \pmod{31}$; е) $x \equiv 21 \pmod{45}$.

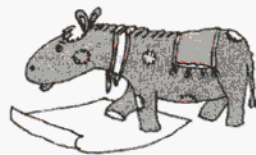
224 Запишите в семеричной системе счисления числа: а) 5; б) 12; в) 29; г) 42.

225 На числовой прямой Ox изобразите указанные промежутки и запишите их обозначения:

- а) $x < 4$; в) $x \geq -6,3$; д) $-2,7 \leq x \leq 0,4$; ж) $-9,2 < x \leq -2,5$;
 б) $x > -7$; г) $x \leq 2,4$; е) $1,5 \leq x \leq 5,1$; з) $-2,7 \leq x < 4,6$.

226 Какие из чисел a , b , c и d расположены в указанном промежутке?

- а) $-9,4 \leq x \leq 0,2$; $a = -9,5$; $b = -9,3$; $c = 0$; $d = 0,3$;
 б) $-3,5 \leq x < 2,1$; $a = -3,6$; $b = -3,3$; $c = 2$; $d = 2,1$;
 в) $6,7 < x \leq 9,8$; $a = 6,6$; $b = 6,9$; $c = 9,3$; $d = 9,8$;
 г) $5,3 < x < 11,6$; $a = 5,2$; $b = 5,3$; $c = 11,4$; $d = 11,6$.



227 Постройте график кусочно-линейной функции:

- а) $y = \begin{cases} 2x - 6, & \text{если } x \geq 3; \\ 6 - 2x, & \text{если } x < 3 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 3 - 2x, & \text{если } x \geq -1; \\ 5, & \text{если } x < -1 \end{cases}$
 в) $y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x \geq 3; \\ 7, & \text{если } -4 \leq x < 3; \\ -2x - 1, & \text{если } x < -4 \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x \geq -1,5; \\ 3x + 8, & \text{если } -5 \leq x < -1,5; \\ x - 2, & \text{если } x < -5 \end{cases}$

228 Принадлежат ли графику кусочно-линейной функции точки A и B , если:

- а) $y = \begin{cases} 5x - 2, & \text{если } x \geq -1; \\ -7, & \text{если } x < -1 \end{cases}$ $A(1; 3), B(-2; -12)$;
 б) $y = \begin{cases} 3, & \text{если } x \geq 0; \\ 7x + 3, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ $A(1; 10), B(-3; -18)$;
 в) $y = \begin{cases} 5x - 6, & \text{если } x \geq 1,2; \\ -3,6 + 3x, & \text{если } x < 1,2 \end{cases}$ $A(2; 4), B(1; -1)$;
 г) $y = \begin{cases} 4x + 8, & \text{если } x \geq -2; \\ -8 - 4x, & \text{если } x < -2 \end{cases}$ $A(0; -8), B(-3; 4)$?



Постройте графики этих функций.

229 а) Велосипедист в течение первых двух часов ехал со скоростью 10 км/ч. Доехав за это время до прекрасного озера, он решил остановиться и полюбоваться видами. Через 30 минут он продолжил свое путешествие и в течение следующих трех с половиной часов ехал со скоростью 15 км/ч. Запишите формулу зависимости пути велосипедиста s в км от времени его движения t в часах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ost .

б) Бассейн в течение первых 4 часов наполняли со скоростью 30 м³ в час, в течение следующих 2 часов скорость наполнения увеличили до 40 м³ в час, а последние 2 часа он наполнялся со скоростью 50 м³ в час. Запишите формулу зависимости объема воды в бассейне V в м³ от времени его наполнения t в часах и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ovt .

230 Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(2)$, $f(-7)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 3$, $f(x) = -2$. Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x + 7, & \text{если } x \geq -7; \\ -7 - x, & \text{если } x < -7 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x - 6, & \text{если } x \geq 6; \\ 6 - x, & \text{если } x < 6 \end{cases}$

231 Постройте график кусочно-линейной функции. Определите по графику, при каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля.

а) $y = \begin{cases} 5, & \text{если } x \geq 3; \\ x + 2, & \text{если } -7 \leq x < 3; \\ -6, & \text{если } x < -7 \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 3x - 14, & \text{если } x \geq 6; \\ x - 3, & \text{если } 2 \leq x < 6; \\ 3x - 7, & \text{если } x < 2 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 4x + 8, & \text{если } x \geq -2,5; \\ -x - 4,5, & \text{если } -4 \leq x < -2,5; \\ 2x + 6, & \text{если } x < -4 \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} -4x + 7, & \text{если } x \geq 2; \\ 2x - 5, & \text{если } -3 \leq x < 2; \\ -3x - 20, & \text{если } x < -3 \end{cases}$

232 Постройте график функции $y = f(x)$. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = |x - 2|$, $a = 1$; $b = 6$;

в) $f(x) = 3|x| - 4$, $a = -2$; $b = -1$;

б) $f(x) = |x + 3| - 1$, $a = -3$; $b = 3$;

г) $f(x) = |x - 5| + 1$, $a = 4$; $b = -3$.

233 Определите, не строя график функции $y = f(x)$, проходит ли он через точку A :

а) $f(x) = |5x - 1|$, $A(-1; 4)$;

в) $f(x) = |7x + 2| - 3x$, $A(-2; 18)$;

б) $f(x) = |6 - 2x| + 5$, $A(1; 4)$;

г) $f(x) = 2x - |5x - 4|$, $A(-3; -5)$.

234 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :

а) $f(x) = |x + 5|$;

в) $f(x) = |2x + 3| + 4$;

д) $f(x) = |5x + 4| + 3$;

б) $f(x) = |x - 3|$;

г) $f(x) = -3|x - 7| - 3$;

е) $f(x) = -|4x - 9| - 6$.

235 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y = \begin{cases} 4x - 5, & \text{если } x \geq 2; \\ x + 1, & \text{если } -2 \leq x < 2; \\ -2, & \text{если } -3 \leq x < -2; \\ -4x - 13, & \text{если } -4 \leq x < -3; \\ 3, & \text{если } x < -4 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x - 8, & \text{если } x \geq 5; \\ -x + 2, & \text{если } 2 \leq x < 5; \\ x - 2, & \text{если } 1 \leq x < 2; \\ -x, & \text{если } -3 \leq x < 1; \\ -3x - 6, & \text{если } -4 \leq x < -3; \\ -2x - 2, & \text{если } x < -4 \end{cases}$

236 Постройте графики функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |x + 5| - |x - 4|$;

б) $f(x) = -|2 - x| + |x - 3|$.

237 Вычислите:

а) $42,2 \text{ кг} - ((6 + 97,28 : 32) \cdot 2500 \text{ г} - 0,016 \text{ ц}) \cdot 1,2 - 15 \text{ т} : 1000$;

б) $1 \text{ км} \cdot (0,1509 - 0,1379) + 0,1 \text{ м} \cdot (9,1 - 7,5) - 60 \text{ см} \cdot (27,7 - 24,2)$.

238 Запишите разность многочленов P и Q как многочлен стандартного вида:

а) $P = 3p^4 + 5pq^3 - 4q$, $Q = 5p^4 + 7pq^3 - 2q$;

б) $P = -7x^3 + 4xy + 5y^3 - (2y^3 + 5xy - 9x^3)$, $Q = 2x^3 - 2xy + 2y^3$.

239 Найдите значение выражения:

а) $\frac{x^{25} \cdot x^{31} \cdot x^{19} \cdot (x^3)^6 \cdot (2x)^{34}}{2^{32} \cdot (x^{78} : x^{34}) \cdot x^{36} \cdot x^{46}} + 3x^0$ при $x = -3$;

б) $\frac{5^{49} \cdot (y^{59} : y^{37}) \cdot z^{27} \cdot z^{37} \cdot (yz)^{61}}{z^{35} \cdot y^{26} \cdot (y^{97} : y^{63}) \cdot (z^4)^{10} \cdot (5z)^{49} \cdot y^{23}} - 11(yz)^0$ при $y = -5,6$; $z = 4$.

240 Не вычисляя остатков, докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c :

а) $a = 75\,928$, $b = 76\,468$, $c = 27$;

в) $a = 125\,468$, $b = 127\,108$, $c = 41$;

б) $a = 93\,459$, $b = 94\,479$, $c = 34$;

г) $a = 236\,547$, $b = 239\,997$, $c = 69$.

241 Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом a по модулю m :

а) $a = 5917$, $m = 9$;

в) $a = -43\,619$, $m = 43$;

б) $a = 34\,215$, $m = 17$;

г) $a = -56\,793$, $m = 61$.

242 Решите уравнение:

а) $x^2 - 64 = 0$;

в) $(3z - 4)^2 - 100 = 0$;

д) $(b + 7)^2 - (5b - 3)^2 = 0$;

б) $144 - y^2 = 0$;

г) $49 - (4a + 6)^2 = 0$;

е) $(6c - 1)^2 - (2c + 8)^2 = 0$.

243 а) В краснодарском филиале пончиковой компании Антона и Ксюши женщины составляют $\frac{5}{6}$ от числа работающих там мужчин. Какую часть составляют женщины от всех работников краснодарского филиала пончиковой компании?

б) Когда в магазине в течение недели продали $\frac{7}{18}$ первоначального запаса пончиков, то пончиков осталось на 50 кг больше половины первоначального запаса. Сколько пончиков продали на этой неделе?

244 Найдите три значения x , таких, что:

а) $x \equiv 4 \pmod{7}$;

б) $x \equiv 12 \pmod{15}$;

в) $x \equiv 21 \pmod{32}$.

245 Запишите в пятеричной системе счисления числа: а) 4; б) 19; в) 27; г) 38.

246 Решите уравнение:

а) $x^2 - 3x - 54 = 0$;

в) $a^2 - 19a + 60 = 0$;

б) $y^2 + 15y + 56 = 0$;

г) $-b^2 - 3b + 70 = 0$.

247 Докажите, что $|A| = |B|$:

$$A = \frac{(4,561 + 5,439) \cdot 0,1}{(7,01 - 5,01) : 0,5} + \frac{(4,45 - 2,2) : 0,3}{(0,823 + 0,177) \cdot 30};$$

$$B = 56 : \left[\frac{6 : (0,4 - 0,2)}{2,5 \cdot (0,8 + 1,2)} + \frac{(34,06 - 33,81) \cdot 4}{3,42 : (28,57 - 25,15)} \right] - 8.$$



248* Три бегуна участвовали в соревнованиях. В момент, когда первый и второй бегун были в одном месте, третий отставал от них на 6 км. А когда третий догнал первого, второй отставал от них на 3 км. На сколько километров первый бегун обогнал второго в тот момент, когда второго бегуна догнал третий?

249* Число 100 разделили на некоторое натуральное число и получили в остатке 4. Число 90 разделили на то же самое число и получили в остатке 18. На какое число делили эти числа?

Задачи для самоконтроля к Главе 5

- 250** Зависимость y от x задана таблицей. Найдите ее область определения и область значений. Определите, является ли эта зависимость функцией.

а)

x	-4	-1	0	2	5
y	-1	4	-1	9	6

б)

x	1	2	3	2	4
y	1	2	3	4	5

- 251** Задайте зависимость пути s (в километрах), который проехал автобус с постоянной скоростью 60 км/ч, от времени движения t (в часах). Укажите ее область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение величины зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной:

а) $t = 5$ ч; б) $t = 2$ ч 30 мин; в) $t = 3$ ч 20 мин; г) $t = 4$ ч 45 мин.

- 252** Функция задана словесным описанием, найдите ее значения в точках x_1 , x_2 , и x_3 .

а) Всем целым числам, кратным 6, поставлено в соответствие число 2, а всем целым числам, которые не делятся на 6, поставлено в соответствие число -2.

$$x_1 = 25; x_2 = -48; x_3 = -216.$$

б) Всем положительным рациональным числам поставлено в соответствие число 10, а всем неположительным числам - число 5.

$$x_1 = -7,3; x_2 = 19,6; x_3 = -21,7.$$

Найдите область определения и область значений этих зависимостей. Являются ли данные зависимости функциями?

- 253** Функция задана с помощью таблицы. Задайте ее графически.

а)

x	-5	-3	0	2	4
y	6	4	2	0	-2

б)

x	-9	-4	0	3	5
y	-5	-3	2	4	6

- 254** Функция задана формулой. Найдите ее область определения.

а) $y = x^3$; в) $y = \frac{4}{2x-7}$; д) $y = \frac{x+3}{(x-4)(2x+6)}$; ж) $y = \frac{6(x-4)}{2x(x+8)}$.

б) $y = -5x + 4$; г) $y = \frac{3x+6}{5}$; е) $y = \frac{5}{8x^3}$; з) $y = 12 : x^2$.

- 255** Функция задана формулой. Найдите ее значение в точках x_1 , x_2 и x_3 .

а) $y = -3x + 4$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$; в) $y = 4x^3$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$;

б) $y = \frac{5}{x-6}$; $x_1 = 0$; $x_2 = -3$; $x_3 = 5$; г) $y = \frac{8x-2}{4}$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$; $x_3 = -6$.

- 256** На координатной прямой Ox изобразите следующие промежутки:

а) $x < 6$; б) $x \geq -3$; в) $-2 < x < 5$; г) $-7 \leq x \leq -4$; д) $-9 < x \leq 2$.

Как они называются? Запишите их обозначение.

- 257** Какие из чисел a , b , c и d расположены в промежутке:

а) $-9,7 \leq x \leq 5,6$, $a = -9,8$, $b = -9,6$, $c = 5,5$, $d = 5,6$;

б) $-4,8 \leq x < 2,7$, $a = -4,8$, $b = -4,9$, $c = 2,8$, $d = 2,7$?



- 258** Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$, если:
 а) $k = 2$; б) $k = -3$; в) $k = -0,5$.
- 259** Точка $A(p, q)$ принадлежит графику функции $y = kx$. Найдите коэффициент пропорциональности k и постройте график данной функции, если:
 а) $p = 4, q = -1$; б) $p = -3, q = 7,5$; в) $p = -2, q = -8$.
- 260** Принадлежат ли графику функции $y = kx$ точки A и B , если:
 а) $k = 4, A(0; 4), B(-2; -8)$; б) $k = -5, A(-2; 10), B(3; 15)$?
- 261** Не строя графика зависимости $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если:
 а) $k = 6,7$; б) $k = -9,4$; в) $k = -5,9$; г) $k = 11,8$.
- 262** Постройте график функции $y = f(x)$.
 а) $f(x) = -2x - 3$; б) $f(x) = 0,5x + 4$; в) $f(x) = 5 - 3x$.
- 263** Не строя графика функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку A :
 а) $f(x) = 9x - 11, A(1; 7)$; б) $f(x) = -12x + 14, A(-4; -34)$;
 в) $f(x) = 4,3x + 9, A(-10; 34)$; г) $f(x) = -7x - 8, A(-2; 6)$.
- 264** Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$. Используя полученный график, постройте график линейной зависимости $y = kx + b$, если:
 а) $k = -1, b = 3$; б) $k = 4, b = -2$; в) $k = 2,5, b = -4$; г) $k = -1,5, b = 6$.
- 265** При каких значениях b график функции $y = -4x + b$ проходит через точку A ?
 а) $A(2; 5)$; б) $A(-3; -8)$; в) $A(1; 7)$; г) $A(-6; 3)$.
- 266** Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :
 а) $f(x) = 6x + 7$; б) $f(x) = -3x + 5$; в) $f(x) = 8x - 9$.
- 267** Постройте график кусочно-линейной функции:
 а) $y = \begin{cases} x + 5, & \text{если } x \geq -2; \\ -x + 1, & \text{если } x < -2 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -2x + 5, & \text{если } x \geq 3; \\ -1, & \text{если } -1 \leq x < 3; \\ 2x + 1, & \text{если } x < -1 \end{cases}$
- 268** Принадлежат ли графику кусочно-линейной функции точки A и B , если:
 а) $y = \begin{cases} 4x - 1, & \text{если } x \geq 2; \\ 9 - x, & \text{если } x < 2 \end{cases}$ $A(1; 3), B(-2; -9)$;
 б) $y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x \geq -2; \\ -5 - x, & \text{если } x < -2 \end{cases}$ $A(2; -5), B(-3; -2)$?
- 269** Определите, не строя график функции $y = f(x)$, проходит ли он через точку A :
 а) $f(x) = |2x - 4|, A(1; -2)$; б) $f(x) = |3x + 5| + 7, A(-4; 14)$.
- 270** Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :
 а) $f(x) = |x + 7|$; б) $f(x) = |x - 11|$; в) $f(x) = |x - 3| + 2$; г) $f(x) = |9 - x| + 5$.

- 271** Постройте график функции $y = f(x)$.
 а) $f(x) = |x - 6|$; б) $f(x) = |x + 5|$; в) $f(x) = 3|x| - 4$; г) $f(x) = |x - 6| + 3$.
- 272** Решите уравнение:
 а) $10,2 - (4,3x - 5,3) + 5,6 = 4,2x - (3,5 - 0,5x) + 0,8x - (3,9x - 4,8) + 0,7x$;
 б) $3,4y - 12,5 - 4,6 + (6,4 - 1,2y) = 12,3 + 6,5y - (9,3 - 3,6y) - 5,8$;
 в) $(a + 8)^2 - 25 = 0$; г) $(3b - 9)^2 - 36 = 0$; д) $16(c + 6)^2 - 9c^2 = 0$.
- 273** Упростите выражение:
 а) $a^3(b - c) + c(a^3 - b) + b(ac + c) - ab(c + 3)$;
 б) $(m + 3)(4 - m) + (5 - m)(m + 5) + (m - 6)(m + 6)$.
 в) $8x^5 - 2y^4 - (6x^3y - 3x^2y^2 - 2xy^3) - (9x^5 + 4xy^3 - 4x^3y - y^4) - (-4x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3)$;
 г) $3p^4 + 5p^3q - (7p^2r - 5pq) + 4q^4 - (3p^3q - 3p^2r + 6pq) + (-4p^4 - 2p^3q + 4p^2r)$.
- 274** а) Из Москвы и Астрахани, расстояние между которыми 1400 км, выехали одновременно навстречу друг другу пассажирский и товарный поезда. Через 2 ч расстояние между ними было равно 1100 км. Найдите скорости обоих поездов, если скорость пассажирского поезда в 1,5 раза больше скорости товарного.
 б) Из Москвы в Волгоград вышел теплоход со скоростью 25 км/ч. Через 4 часа из Москвы в том же направлении вышел второй теплоход, который передвигался со скоростью 20 км/ч. Чему равно расстояние между Москвой и Волгоградом, если в Волгоград второй теплоход прибыл на 13,5 часа позже первого?
 в) Машины в пробке движутся со скоростью 5 км/ч. Водитель машины, двигавшейся по встречной полосе со скоростью 70 км/ч, заметил, что путь от начала и до конца пробки занял у него 15 минут. Определите длину пробки.
 г) Смешали 700 г воды и 50 г сахара. Сколько воды надо добавить к этому раствору, чтобы получить раствор, концентрация сахара в котором 5%?
 д) Смешали 60 л 25%-го раствора соли с 70 л 10%-го раствора соли. Определите процентную концентрацию соли в получившемся растворе. Ответ округлите с точностью до десятых процента.
- 275** Сократите дроби при допустимых значениях переменных:
 а) $\frac{21x^{21}y^{62}z^{35}}{14x^{20}y^{64}z^{34}}$; б) $\frac{40p^{12}q^{18} - 56p^{18}q^{12}}{64p^{12}q^{12}}$; в) $\frac{42a^9b^{15} - 49a^{15}b^9}{28a^{12}b^9 - 63a^9b^{12}}$.
- 276** Не вычисляя частного, определите, делится ли число a на b :
 а) $a = -38\ 765$, $b = -15$; б) $a = -113\ 256$, $b = 12$; в) $a = 565\ 695$, $b = -45$;
 г) $a = -115\ 218$, $b = 6$; д) $a = -198\ 514$, $b = -18$; е) $a = 754\ 264$, $b = -24$.
- 277** Докажите, что числа a и b дают одинаковые остатки при делении на c :
 а) $a = 58\ 673$, $b = 59\ 513$, $c = 28$; б) $a = 29\ 378$, $b = 32\ 318$, $c = 49$;
 в) $a = 63\ 457$, $b = 65\ 207$, $c = 35$; г) $a = 87\ 439$, $b = 100\ 839$, $c = 67$.
- 278** Приведите дроби к общему знаменателю:
 а) $\frac{2}{469}$ и $\frac{3}{737}$; б) $\frac{3}{793}$ и $\frac{5}{1159}$; в) $\frac{4}{1219}$ и $\frac{5}{1643}$.

279 а) В торговом центре 56 магазинов, в которых работают 282 человека. Докажите, что в этом торговом центре есть хотя бы один магазин, в котором работает не менее 6 человек.

б) Девять врачей посетили 35 больных. Докажите, что хотя бы два врача посетили одинаковое количество больных.

280 Зависимость задали следующим образом: каждому рациональному числу a поставили в соответствие наименьшее целое число, большее этого числа. Определите, является ли данная зависимость функциональной. Найдите значение зависимой переменной для указанных значений независимой переменной a .

а) $a = 10,2$; б) $a = 8,4$; в) $a = -9,6$; г) $a = -3,1$; д) $a = -5,7$.

281 Каждому рациональному числу x поставили в соответствие некоторое число y по следующему правилу:

$$y = x^2 - 15.$$

Найдите область определения и область значений этой зависимости. Определите, является ли данная зависимость функцией. Существуют ли значения независимой переменной x , при которых значение зависимой переменной y равно -18 ?

282 Для функции $y = f(x)$ найдите $f(0)$, $f(3)$, $f(-6)$. Найдите значения x , при которых $f(x) = 0$, $f(x) = 7$, $f(x) = -3$. Постройте график функции.

$$y = \begin{cases} -3x - 1, & \text{если } x \geq 1; \\ -x - 3, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

283 Постройте график кусочно-линейной функции:

$$y = \begin{cases} x - 5, & \text{если } x \geq 7; \\ -x + 9, & \text{если } 5 \leq x < 7; \\ x - 1, & \text{если } 3 \leq x < 5; \\ -x + 5, & \text{если } 1 \leq x < 3; \\ x + 3, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -x + 1, & \text{если } x < -1 \end{cases}$$



284 Постройте графики функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |x + 4| - |x - 5|$; в) $f(x) = -|7 - x| - |x - 6|$;

б) $f(x) = |x - 2| + |3 - x|$; г) $f(x) = |x + 2| - |5 - x|$.

285 Докажите, что:

а) $a^5 - 5a^3 + 4a$ делится на 120 при любом целом a ;

б) число 8 не может быть корнем уравнения $ax^3 + 5bx^2 + 3x + 5 = 0$ при любых натуральных a и b .

286 Выполните указанное действие по модулю m :

а) $16 + 29$, $m = 7$; в) $54 - 96$, $m = 17$; д) $56 \cdot 39$, $m = 19$;

б) $35 + 64$, $m = 11$; г) $25 - 124$, $m = 21$; е) 4^9 , $m = 9$.

287 Найдите остаток от деления a на b :

а) $a = 341^{143}$, $b = 17$; б) $a = 967^{769}$, $b = 7$; в) $a = 853^{358}$, $b = 11$.

Глава 6

Введение в теорию линейных уравнений и неравенств

§ 1. Линейные уравнения

1. Линейные уравнения и их решение



Подобно тому, как дар слова обогащает нас мнениями других, так язык математических знаков служит средством еще более совершенным, более точным и ясным.

Николай Иванович Лобачевский (1792–1856),
русский математик, создатель одной из
неевклидовых геометрий

Прежде чем начать изучение линейных уравнений, вспомним, что такое уравнение и что значит решить его.

Мы знаем, что если между двумя числами или двумя алгебраическими выражениями стоит знак «=», то получившееся математическое предложение называют *равенством*.

Если равенство верно при любых значениях входящих в него букв или если это верное числовое равенство, то его называют *тождеством*.

Тождествами, например, являются следующие равенства:

$$4 + 5 = 9; a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

В тождествах с переменными вместо знака «=» часто используют знак « $\equiv$ », для того чтобы подчеркнуть, что данное равенство верно при всех значениях переменных. Так, $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$.

Если равенство с переменными не является тождеством, то оно верно лишь при некоторых значениях букв. Такие равенства мы и будем называть *уравнениями*.

Буквы, входящие в уравнение, называют *неизвестными*. Уравнения могут быть с одним неизвестным, двумя, тремя и т. д.

Решить уравнение – это значит найти все значения входящих в него неизвестных, при которых равенство становится тождеством. Эти значения неизвестных называют *корнями уравнения*.

Уравнение может иметь один корень, два корня и так далее, а может вообще не иметь корней.

Решая уравнения, мы производим преобразования, заменяя одно уравнение другим, до тех пор, пока не получим уравнение самого простого вида, например, $x = a$. После чего мы говорим, что число a является корнем исходного уравнения. Но утверждать это мы можем только тогда, когда уверены, что все уравнения, полученные в результате проведенных преобразований, имеют одни и те же корни. Такие уравнения называются *равносильными*.

Определение 1. Два уравнения **равносильны**, если корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, а корни второго уравнения являются корнями первого уравнения.

Так, например, уравнения $4x + 5 = 1$ и $4x = -4$ равносильны, так как имеют один и тот же корень $x = -1$.

А уравнения $4x + 5 = 1$ и $x^2 = 1$ не равносильны, так как первое имеет только один корень $x = -1$, а второе – два корня, $x = 1$ и $x = -1$.

Определение 2. Преобразование уравнения называют **равносильным**, если оно приводит к уравнению, равносильному данному.

Правила равносильных преобразований уравнений основываются на известных нам общих свойствах равенств – рефлексивности, симметричности и транзитивности – и правилах преобразований числовых равенств (правилах «весов»):

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}: \quad \begin{array}{ll} a = b \Leftrightarrow a + c = b + c & a = b \Leftrightarrow ac = bc \\ a = b \Leftrightarrow a - c = b - c & a = b \Leftrightarrow a : c = b : c \quad (c \neq 0) \end{array}$$

То есть если два равных числа увеличить, уменьшить, умножить или разделить на одно и то же число (исключая деление на 0), то мы вновь получим два равных числа.

Из данных свойств чисел непосредственно следуют *правила равносильных преобразований уравнений*. При этом необходимо учесть, что при умножении обеих частей уравнения на 0 равносильность может нарушаться. Так, например, уравнение $x = 2$ имеет один корень – число 2, а корнем уравнения $x \cdot 0 = 2 \cdot 0$ является любое рациональное число. Поэтому умножение обеих частей уравнения на 0, наряду с делением на 0, так же следует исключить.

Правила равносильных преобразований уравнений

1. Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть одно и то же число (выражение), то получим уравнение, равносильное данному.
2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число (выражение), отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.

Из первого приведенного выше правила следует уже известный способ решения уравнений:

Слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую, меняя при этом его знак на противоположный.

Теперь, уточнив понятие уравнения и сформулировав правила равносильных преобразований уравнений, перейдем к изучению общего способа решения одного из видов уравнений.

Ранее, при решении задач, мы часто сталкивались с уравнениями вида:

$$x + 6 = 0; \quad -2x = 0; \quad 0,3x - 5 = 0.$$

Каждое из этих уравнений содержит одно неизвестное x . Левую их часть можно записать в виде $kx + b$, где k и b – некоторые числа, а их правая часть равна нулю. Уравнения данного вида получили название *линейных уравнений* по аналогии с названием линейной функции $y = kx + b$, которая задается выражением аналогичного вида $kx + b$ и график которой представляет собой прямую линию.

Определение 3. *Линейным уравнением* с одним неизвестным x называется уравнение, которое при всех значениях x может с помощью равносильных преобразований быть представлено в виде $kx + b = 0$, где k, b – некоторые числа.

Число k называют *коэффициентом при неизвестном*, а число b – *свободным членом* линейного уравнения.

Так, в приведенных выше уравнениях значения k и b равны:

Уравнение	Значение k	Значение b
$x + 6 = 0$	1	6
$-2x = 0$	-2	0
$0,3x - 5 = 0$	0,3	-5



Решим линейное уравнение $kx + b = 0$ в общем виде. Для этого перенесем слагаемое b в правую часть равенства, поменяв его знак на противоположный:

$$kx + b = 0 \Leftrightarrow kx = -b$$

При решении полученного уравнения возможны два случая: $k \neq 0$ и $k = 0$.

1) Если $k \neq 0$, то обе части уравнения можно разделить на k , тогда:

$$kx = -b \Leftrightarrow \frac{kx}{k} = -\frac{b}{k} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{k}.$$

Следовательно, при $k \neq 0$ линейное уравнение имеет единственный корень $-\frac{b}{k}$.

2) Если $k = 0$, то уравнение $kx = -b$ равносильно уравнению $0 \cdot x = -b$, которое при $b \neq 0$ не имеет решений, а при $b = 0$ становится тождеством (то есть его решением является любое число).

Таким образом, в зависимости от значений k и b уравнение $kx + b = 0$ имеет следующие корни:

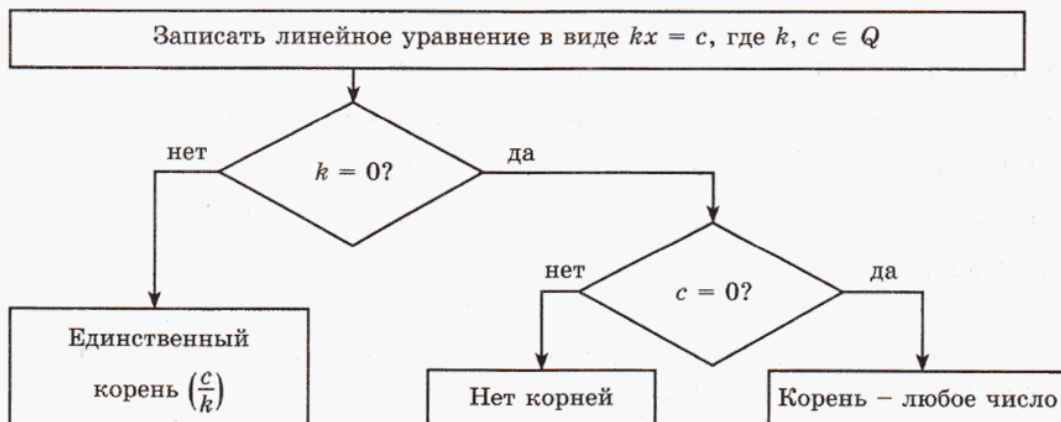
Значение k	Значение b	Корень уравнения
$k \neq 0$	b – любое число	$-\frac{b}{k}$
$k = 0$	$b \neq 0$	Нет корней
$k = 0$	$b = 0$	Корень – любое число



Запишем теперь алгоритм решения линейного уравнения с одним неизвестным, обозначив для простоты $-b = c$. Тогда:

$$kx + b = 0 \Leftrightarrow kx - c = 0 \Leftrightarrow kx = c$$

Алгоритм решения линейного уравнения с одним неизвестным



Заметим, что с помощью равносильных преобразований к виду $kx = c$ могут быть приведены самые различные уравнения, например:

$$6x - 5 = 4x + 3; \quad 7x - (2x - 4) = 5x - 1; \quad \frac{4x - 2}{9} = \frac{2x - 1}{4,5}.$$

Следовательно, все подобные уравнения также будут линейными. Поэтому для их решения можно воспользоваться полученным выше алгоритмом.

Пример 1. Решите уравнение $6x - 5 = 4x + 3$.

Решение:

$$6x - 5 = 4x + 3 \Leftrightarrow 6x - 4x = 5 + 3 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 8 : 2 \Leftrightarrow x = 4$$

Ответ: {4}.

Пример 2. Решите уравнение $7x - (2x - 4) = 5x - 1$.

Решение:

$$7x - (2x - 4) = 5x - 1 \Leftrightarrow 7x - 2x + 4 = 5x - 1 \Leftrightarrow 7x - 2x - 5x = -1 - 4 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -5$$

Ответ: $\emptyset$.

Пример 3. Решите уравнение $\frac{4x - 2}{9} = \frac{2x - 1}{4,5}$.

Решение:

$$\frac{4x - 2}{9} = \frac{2x - 1}{4,5} \Leftrightarrow \frac{9(4x - 2)}{9} = \frac{9(2x - 1)}{4,5} \Leftrightarrow 4x - 2 = 2(2x - 1) \Leftrightarrow 4x - 2 = 4x - 2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0.$$

Ответ: x – любое число.

К

288 1) Решите уравнения:

$$x + 5 = 2; \quad 7 = 8 - y; \quad 4m = 36; \quad n : 3 = 9; \quad 5p - 3 = 17.$$

Какими правилами равносильных преобразований вы пользовались при решении этих уравнений?

2) Дайте определение равносильных уравнений и равносильных преобразований уравнений. Сравните свои определения с определениями 1 и 2 на стр. 63–64 учебника.

289

Используя правила равносильных преобразований, докажите, что все приведенные ниже уравнения равносильны между собой:

$$5x = 36 - 7x; \quad x : 0,5 + 11 = x + 14; \quad 18x - 3 - 12x + 2 = 2 + 4x + 3.$$

290

Равносильны ли уравнения?

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|
| а) $6x + 5 = 0$ и $6x = -5$; | д) $x(4 - x) = 0$ и $x - 4 = 0$; |
| б) $2y - 1 = 0$ и $y = -0,5$; | е) $y^2 = 9$ и $(y - 3)(y + 3) = 0$; |
| в) $2 - 2z = 0$ и $2x - 2 = 0$; | ж) $z(z - 7) = 0$ и $y(y + 3) = 0$; |
| г) $-4z - 1 = 0$ и $1 - 4y = 0$; | з) $z(z + 5) = 0$ и $x(x + 5) = 0$. |

291

1) Запишите в общем виде уравнения:

$$x + 6 = 0; \quad -2x = 0; \quad 0,3x - 5 = 0.$$

Как вы предложили бы назвать уравнения данного вида? Почему? Дайте определение уравнений указанного вида.

2) Сравните свое определение с определением 3 на стр. 64 учебника.

- 292** Пользуясь определением, найдите линейные уравнения с одной переменной среди уравнений, приведенных ниже. Запишите их в виде $kx + b = 0$ и определите значения k и b :

$$-3,2x = 4; \quad 8 - \frac{y}{9} = 5; \quad 2x + y = 7; \quad 3 : x + 12 = 0; \quad 0 \cdot a = -2; \quad x^2 = 1.$$

- 293** 1) Решите линейные уравнения. Какие случаи могут возникнуть при их решении?
 $4x - 13 - 8x = -1;$ $8x - 24 - 3x = 5x + 6;$ $9 - x + 7 + 4x = 3x + 16.$

2) Используя результаты предыдущего задания, решите в общем виде линейное уравнение $kx + b = 0$, где $k, b \in \mathbb{Q}$, и предложите свой алгоритм решения произвольного линейного уравнения с одним неизвестным.

3) Сравните свое решение и алгоритм с таблицей и алгоритмом, приведенными в учебнике на стр. 65.

- 294** Найдите корни линейного уравнения (устно). Сделайте проверку.

а) $7x = -2,8;$ г) $-b = \frac{1}{9};$ ж) $-z + 5 = 0;$ к) $u - 1 = -\frac{1}{5};$
 б) $-3y = 0,15;$ д) $-6 = 0,3c;$ з) $0 = 0,6t + 6;$ л) $2 - 3m = 1;$
 в) $2,5a = 0;$ е) $0 = \frac{2}{3}d;$ и) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}k = 0;$ м) $\frac{1}{7} = 0,1n + 2\frac{1}{7}.$

- 295** Решите линейное уравнение:

а) $8 - 2a = a - 4;$ г) $7d + 0,9 - 2d = -1,6;$ ж) $-\frac{x}{5} + 8 = 13;$ к) $\frac{r}{3} + \frac{r}{6} = \frac{r}{2};$
 б) $3b - 4b = 15 - b;$ д) $m + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + m - \frac{1}{2};$ з) $\frac{y}{3} - 5 = -10;$ л) $\frac{s}{3} = \frac{s}{5} + 2;$
 в) $-2 - 0,5c = c - 2;$ е) $3,8n - \frac{1}{5} = 4n + 1,4;$ и) $\frac{z}{2} + \frac{z}{3} = 5;$ м) $\frac{u}{4} + 5 = \frac{u}{2} - 1.$

- 296** При каких значениях переменной равны значения указанных выражений?

а) $8x - 3$ и $5x + 6;$ в) $5z - 9$ и $7z - 13;$ д) $20 - 2b$ и $b - 1;$
 б) $2y - 19$ и $7y + 31;$ г) $10a - 3$ и $a + 3;$ е) $19 - c$ и $100 - 10c.$

- 297** Решите уравнение:

а) $3x + 42 + 7x = 15x - 68 + 10;$ ж) $-1,4k + 8,7 = 2,5k - 2,1 + 1,5k;$
 б) $-35y + 8 + 30y = 47 - 20y - 39;$ з) $0,8m - 1,2 + 0,3m = 2,4 + 1,1m - 3,6;$
 в) $-2z + 225 + z - 50 = 100 - z;$ и) $-3n - 2,7 + 0,2n - 0,5 = 2,8n - 3,2;$
 г) $7a + 6 - 5a = 4 - 3a + 1 - a;$ к) $-4 + 2,4s + 1,6s = -0,9 + 3,4s - 4,06;$
 д) $10b - 24 - 2b + 18 = -b + 9;$ л) $0,1p - p + 1,8 = -6,2 - 0,9p + 8;$
 е) $-12c - 9 + 8c = 15 - 4c - 6;$ м) $7,5q - 0,15 = 1,6 + 1,8q - 2,2 + 1,2q.$

- 298** При каких значениях переменной:

а) значение выражения $9a - 5$ равно 31;
 б) значение выражения $15 - 4b$ равно 3;
 в) значение выражения $7c - 5$ равно значению выражения $3c + 3;$
 г) значение выражения $14d + 23$ противоположно значению выражения $2 - 19d?$

- 299** а) На какое рациональное число нужно уменьшить 785 и увеличить 587, чтобы получить одинаковые числа?
б) Найдите рациональное число, среднее арифметическое которого с числом 916 равно 619.
в) Найдите натуральное число, которое больше своей четверти на 81.
г) Найдите целое число, которое на 48 больше противоположного себе числа.
- 300** Составьте задачу, решение которой может привести к следующему уравнению:
а) $8 + x = 3$; б) $6 - x = 4$; в) $x : 4 = 5$; г) $3x = 7$.
- 301** Найдите корни уравнения:
а) $x - (5 - x) = 3$; д) $8(4 - 5a) = 7 - 5a$;
б) $-2y - (-6 + y) = 1$; е) $2(3b - 4) = -4(b + 3)$;
в) $(z - 2) - (2z + 3) - (5 - z) = 0$; ж) $36 - 5(c + 8) = 3c - 4$;
г) $12 - (k - 4) = (3k + 9) - (4k - 7)$; з) $6(2 - d) - 2(5 - 8d) = 10d$.
- 302** Решите уравнение, предварительно упростив его:
а) $3(x + 8) = 36(x - 3)$; г) $8(2t + 5) - 72(15 - 2t) = 0$;
б) $14(12 - y) = 7(y - 3)$; д) $45(15 - 4a) - 15(7a - 12) = 0$;
в) $-5(35 - z) = 15(z - 9)$; е) $0 = 3(47 - 5b) - 42(10 - 7b)$.
- 303** При каких значениях переменной:
а) значение выражения $11z - 6$ на 2 меньше значения выражения $5z + 8$;
б) значение выражения $9t - 14$ на 6 больше значения выражения $5 - 6t$;
в) значение выражения $2x + 41$ в 7 раз больше значения выражения $x + 3$;
г) значение выражения $7 - y$ в 3 раза меньше значения выражения $5y + 5$?
- 304** Составьте уравнение и решите задачу:
а) Матери 36 лет, а ее дочери 15 лет. Сколько лет назад мать была в 4 раза старше дочери?
б) В двух автобусах едет 45 человек, причем в одном из них едет в 2 раза больше людей. Сколько человек едет в каждом из этих автобусов?
в) В трех спортивных секциях, футбола, баскетбола и волейбола, занимается 55 человек. Известно, что футболом занимается в два раза больше человек, чем баскетболом, а волейболом занимается на 5 человек меньше, чем футболом. Сколько человек занимается в каждой из этих секций?
г) В четырех подъездах дома живут 128 человек. Известно, что в первом подъезде живет на 12 человек больше, чем во втором, и на 15 человек меньше, чем в третьем. В четвертом подъезде живет в 2 раза больше людей, чем в первом. Сколько человек живет в каждом из этих подъездов?
- 305** Докажите, что:
а) уравнение $5x = 5(x + 2)$ не имеет корней;
б) корнем уравнения $3y - 4 = 4(y - 1) - y$ является любое число;
в) число 1 является корнем уравнения $z - 7(1 - z) = 9z - 4(1 + z)$;
г) число (-2) не является корнем уравнения $6(b + 2) + 4 = b - 5(2 - b)$.

306 Докажите, что данное уравнение имеет единственный корень:

а) $10s + 2(7s - 2) = 5(4s + 3) + 3s$; б) $8(3t - 2) - 13t = 5(12 - 3t) + 7t$.

307 Докажите, что данное уравнение не имеет корней:

а) $5(x + 1) + 6(x + 2) = 11(x + 3)$; в) $7(3z + 6) + 5(z - 3) - 13(2z - 3) = 0$;

б) $6(y - 1) + 3(8 - y) = 3(y + 2)$; г) $4(5t - 2) - 2(5t + 2) - 10(t + 4) = 0$.

308 Докажите, что решением данного уравнения является любое число:

а) $8(3x - 1) - 9(5x - 11) = 91 - 21x$; в) $7(6z - 1) + 3(2z + 1) = 4(12z - 1)$;

б) $10(8 - 3y) + 11(y - 4) - 36 + 19y = 0$; г) $3(2t + 1) - 4(1 - 3t) + 1 - 18t = 0$.

309 С помощью равносильных преобразований запишите уравнение в виде $kx = c$ и решите его:

а) $(p - 3)(8 - p) = (p - 6)(2 - p)$; г) $(m + 5)(2 + m) - 3(4m - 3) = (m - 5)^2$;

б) $(q - 5)(q + 1) + (q + 2)(6 - q) = 7$; д) $12 - 2(n - 1)^2 = 4(n - 2) - (n - 3)(2n - 5)$;

в) $(r - 3)(4 + r) = 2(3r - 2) + (4 - r)^2$; е) $(6k - 3)(2k + 1) - (11k - 11)(k + 1) = (k - 1)^2$.

310 Решите уравнение:

а) $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$; е) $1 - \frac{2b - 5}{6} = \frac{3 - b}{4}$; л) $\frac{z - 3}{7} - \frac{z - 25}{5} = 7 - \frac{2 + z}{4}$;

б) $\frac{1 - 9y}{5} = \frac{19 + 3y}{8}$; ж) $\frac{3c - 2}{4} = 2 - \frac{5c - 7}{3}$; м) $3 - \frac{3 - 7t}{10} + \frac{t + 1}{2} = 4 - \frac{7 - 3t}{5}$;

в) $\frac{5 - z}{8} = \frac{18 - 5z}{12}$; з) $\frac{d + 17}{5} - \frac{3d - 7}{4} = 3,5$; н) $a = \frac{a - 1}{3} + \frac{2a - 5}{5} - \frac{a + 8}{6} + 7$;

г) $\frac{4t + 33}{21} = \frac{17 + t}{14}$; и) $\frac{x + 2}{9} - 1 = \frac{2x + 1}{18} - \frac{x}{6}$; о) $\frac{b - 2}{2} + \frac{b - 3}{3} - \frac{b - 4}{4} = \frac{b + 4}{6}$;

д) $\frac{5a + 4}{7} - 2 = \frac{3a - 7}{4}$; к) $\frac{y - 2}{6} - \frac{y + 7}{15} = \frac{y}{4} - 2$; п) $\frac{7d - 2}{3} - \frac{4(d + 3)}{5} + 6 = \frac{3(d + 2)}{2}$.

311 а) Три человека разделили между собой некоторую сумму денег. Первый получил $\frac{1}{5}$ часть этой суммы и еще 190 р., второй — $\frac{1}{4}$ часть суммы и еще 170 р., а третий — $\frac{1}{3}$ часть суммы и еще 160 р. Какую сумму денег разделили?

б) Число строк на странице на 15 меньше, чем число букв в каждой строке. Если уменьшить число букв в каждой строке на 3 и убрать после этого 5 строк, то число всех букв уменьшится на 300. Сколько строк на странице и сколько букв в каждой строке?

в) Переднее колесо повозки, длина окружности которого равна 2,4 м, сделало на некотором расстоянии на 2900 оборотов больше, чем заднее колесо, длина окружности которого равна 3,2 м. Найдите, чему равно это расстояние.

г) Из Москвы в Смоленск отправился со скоростью 40 км/ч товарный поезд. Через 1 час после его выхода из Смоленска в Москву со скоростью 80 км/ч отправился пассажирский поезд. На каком расстоянии от Москвы встретятся эти поезда, если расстояние между Москвой и Смоленском 400 км?

312 При каком значении a уравнение $2a + 5x = 7x - 6$ имеет корень, равный:

- а) $x = 1$; б) $x = -2$; в) $x = 0$; г) $x = 0,5$;

313 Запишите три уравнения, корнем которых является число a :

- а) $a = 2$; б) $a = -3$; в) $a = 3,5$; г) $a = -2,5$.

314 Имеет ли уравнение корни при указанном значении a ?

- а) $4x - a = 2(2x - 3)$, $a = 4$; г) $2(x + 6) - a = 2x + 7$, $a = -5$;
 б) $x + 2a = x + 8$, $a = 4$; д) $3x - a = 5(x - 2) - 2x$, $a = -10$;
 в) $5(x + 3) = 5x + 5a$, $a = -3$; е) $6(x - 3) - 3x = 3x + 6a$, $a = -3$.

При каком значении a уравнение будет иметь корни?

315 Какое число нужно подставить вместо a , чтобы уравнение имело указанный корень?

- а) $ax - 5 = 4x - 3$, если корень уравнения $x = 1$;
 б) $2ay - 6 = 9y - 4$, если корень уравнения $y = -1$;
 в) $\frac{z}{a} - \frac{1}{5} = \frac{z}{16} - \frac{1}{20}$, если корень уравнения $z = \frac{4}{5}$;
 г) $\frac{t}{a} - \frac{1}{5} = t - \frac{1}{5}$, если корень уравнения $t = -\frac{3}{5}$.



316 Найдите ошибку в решении следующего уравнения:

«Дано уравнение $6x - 14 = 15x - 35$. В правой части уравнения выносим за скобки общий множитель 2, а в левой его части – общий множитель 5. Получаем $2(3x - 7) = 5(3x - 7)$. Делим правую и левую части уравнения на одно и то же выражение $3x - 7$. Получаем, что $2 = 5$ (неверно). Значит, уравнение не имеет решений».

317 При каком значении x указанные равенства не имеют смысла?

- а) $5 = \frac{1}{x-4}$; б) $\frac{7}{x-9} = 2$; в) $\frac{6}{z+4} = 11$; г) $\frac{13}{x} = \frac{7}{9}$.

318 Решите уравнение:

- а) $\frac{5}{x} = 9$; д) $\frac{2}{a-3} = \frac{3}{a-2}$; и) $\frac{p+3}{p-3} = \frac{5}{2}$;
 б) $\frac{5}{6} = \frac{3}{4y}$; е) $\frac{1}{b-1} = \frac{2}{b+1}$; к) $\frac{q}{q-5} = \frac{q-2}{q-6}$;
 в) $\frac{2}{z+5} = \frac{1}{3}$; ж) $\frac{1}{2c+5} = \frac{1}{8c+3}$; л) $\frac{r+1}{r-1} = \frac{r-5}{r-3}$;
 г) $\frac{10}{t-2} = 2$; з) $\frac{4}{d+3} = \frac{7}{3d-1}$; м) $\frac{6}{7(s+1)} = \frac{2}{s+9}$.

319 а) Если от загаданного рационального числа отнять 5, результат умножить на 7, к полученному произведению прибавить 2, результат разделить на 6, а к полученному частному прибавить 4, то снова получится загаданное число. Какое число загадали?

б) Какое рациональное число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{26}{69}$, чтобы она стала равна $\frac{1}{2}$?

320 Какое число можно подставить вместо b , чтобы корнем уравнения было целое число?

а) $\frac{x+1}{2} = b$; б) $\frac{5y-3}{3} = b$; в) $b(z+4) = 15$; г) $b(t-2) = 0,5$.

321 Какое число можно подставить вместо c , чтобы корнем уравнения было четное число?

а) $\frac{2x-1}{3} = c$; б) $\frac{7y+3}{2} = c$; в) $c(z-5) = 20$; г) $c(t+6) = 1,5$.

322 Решите уравнение:

а) $\frac{m}{2} - \frac{m}{3} + \frac{m}{4} - \frac{m}{6} - \frac{m}{8} - \frac{m}{12} = 11$; д) $x - \frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} - \frac{2 - \frac{x}{4}}{4} = 2$;

б) $n - \frac{3n}{2} + 9 = \frac{2n}{3} + 4 + \frac{5n}{6} - \frac{6n}{5} + \frac{1}{10}$; е) $y + 2 - \frac{2y - \frac{4-3y}{5}}{15} = \frac{7y - \frac{y-3}{2}}{5}$;

в) $\left(p + \frac{2p}{5}\right) + \frac{1}{5}\left(p + \frac{2p}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} = 6$; ж) $z - \frac{\frac{z}{2} - \frac{3+z}{4}}{2} = 3 - \frac{0,5\left(1 - \frac{6-z}{3}\right)}{2}$;

г) $\left(q + \frac{3q}{8}\right) \cdot \frac{2}{7} + \left(q + \frac{3q}{8}\right) \cdot 7 = 42$; з) $1 - \frac{t - \frac{1+t}{3}}{3} = \frac{t}{2} - \frac{2t - \frac{10-7t}{3}}{2}$.

323 Найдите корни уравнения:

а) $(x+5)^2 - (x-9)^2 = 140$; д) $5(b-1)^2 - 2(b+3)^2 = 3(b+2)^2 - 7(6b-1)$;

б) $(y-3)^2 - (y-4)^2 = 37$; е) $2c^2 + (c+5)^2 - 2(c+7)^2 = 2(3c-72,5) + (c-6)^2$;

в) $(z-6)^2 = 75 + (z-7)^2$; ж) $(d+1)^3 - (d-1)^3 = 6(d^2 + d + 1)$;

г) $55 + (t+3)^2 = (t+2)^2$; з) $(a+8)^2 + (a-5)^2 = (a-4)^2 + (a-6)^2 + 93$.

324 Найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению:

а) $x + a = 4$; д) $5x + d = 5$; и) $x = \frac{x}{a} + b$;

б) $2 - x = b + 3$; е) $2x - c = a + 3x$; к) $x - a = \frac{x}{b}$;

в) $x - c = 5$; ж) $5x + 3a = 7x - 4c$; л) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$;

г) $x + a = b + 2$; з) $9c - 6x = 3a - 5x$; м) $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = d$.



325 Прочитайте высказывания и сформулируйте высказывания, обратные данным. Определите истинность первоначальных высказываний и обратных к ним. Для ложных высказываний постройте их отрицания.

1) $(x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5$ или $x = 3$; 4) $|x| > 7 \Rightarrow x > 7$;

2) $y^2 = 49 \Rightarrow y = 7$; 5) $|x| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq x \leq 6$;

3) $z^3 = -64 \Rightarrow z = -4$; 6) $a > b \Rightarrow b < a$.

326 Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

а) $-(5a + 7)(4a - 3) + (2a + 2,5)(10a - 6)$ при $a = 198,56$;

б) $(b + 5)(9b - 3) - (7 + 3b)^2$ при $b = -215,436$.

327 Докажите высказывание:

а) Если a, b, c делятся на n , то $3a - 4c + 5b$ делится на n ($a, b, c, n \in \mathbb{Z}$).

б) Если a делится на 4, b делится на 5, то $5a + 4b$ делится на 20 ($a, b \in \mathbb{Z}$).

в) Если число $x + \frac{1}{x}$ — целое, то число $x^2 + \frac{1}{x^2}$ также целое ($x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$).

г) Если число $x + \frac{1}{x}$ — целое, то число $x^3 + \frac{1}{x^3}$ также целое ($x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$).

328 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $x - 6 > 5$; в) $5 < z \leq 9$; д) $|a - 3| < 5$;

б) $y + 7 \leq -2$; г) $-4 \leq t < -1$; е) $|b + 5| \geq 2$.

329 Разложите многочлен на множители:

а) $x^4 - x^3 + x - 1$;

д) $b^3 + 8c^3 + b^2 - 2bc + 4c^2$;

б) $y^3 + 27 + 7y^2 + 21y$;

е) $d^3 - 4d^2 - 12d + 27$;

в) $z^5 + z^3 - z^2 - 1$;

ж) $m^3 - n^3 - 6m^2 - 6mn - 6n^2$;

г) $a^3 - a^2 - 9a + 9$;

з) $p^3 - 8p^2 - 32p + 64$.

330 Среди следующих пяти множеств найдите все пары «множество — подмножество». Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A, B, C, D, E .

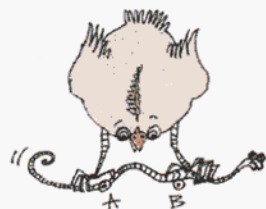
1) A — множество целых чисел, делящихся на 3;

2) B — множество целых чисел, делящихся на 5;

3) C — множество целых чисел, делящихся на 15;

4) D — множество целых чисел, делящихся на 9;

5) E — множество целых чисел, делящихся на 45.



331 а) В магазине имеются пряники по цене 30 р. за кг и по цене 50 р. за кг. В течение дня было продано тех и других пряников на одинаковую сумму. Чему была равна средняя цена за килограмм проданных в этот день пряников?

б) Средний возраст 20 спортсменов и одного тренера равен 25 годам. А средний возраст этих спортсменов — 24 года. Сколько лет тренеру?

332 Докажите следующие утверждения:

а) Не существует наибольшего четного числа.

б) Существует бесконечно много натуральных чисел вида $7n + 3$, где $n \in \mathbb{N}$.

в) Не существует целого числа, которое при делении на 8 дает остаток 6, а при делении на 16 дает остаток 4.

333 Разбейте множество $\{1, 3, 7, 9, 25, 65, 70\}$ на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась сумме чисел в другой.

2

334 Решите уравнение:

а) $\frac{x}{9} - 6 = 12$;

в) $3,9z + 4,3z = 1,2z + 28,8 - 7,4z$;

б) $\frac{y}{5} - \frac{y}{6} = 7$;

г) $4,7t - 3,8 = 0,3t - 0,7t - 7,2 + 3,4t$.

335 Найдите корни уравнения:

а) $5(x - 9) = 3(x + 7)$;

г) $(a + 8)(1 - a) = 8 - a(a - 11)$;

б) $6(9 - y) = 7(4 - y)$;

д) $(2 - b)(4 - b) = 17 - (b + 2)(7 - b)$;

в) $z(z - 3) = (4 + z)(z - 5)$;

е) $(11 - 2c)(5c - 6) = 80 - 10(c - 3)^2$.

336 При каких значениях переменной:

а) значение выражения $5a - 38$ равно 12;

б) значение выражения $2c + 45$ равно значению выражения $6c + 17$;

в) значение выражения $7d - 31$ противоположно значению выражения $41 - 8d$;

г) значение выражения $7x - 40$ в 6 раз больше значения выражения $x - 5$;

д) значение выражения $1 - y$ в 7 раз меньше значения выражения $y - 17$;

е) значение выражения $5z - 20$ на 4 меньше значения выражения $19 - 2z$;

ж) значение выражения $t + 31$ на 5 больше значения выражения $106 - 7t$?

337 Докажите, что:

а) уравнение $9x - 3 = 9(x - 1)$ не имеет корней;

б) корнем уравнения $5y - 7 + y = 6(y - 1) - 1$ является любое число;

в) число 5 является корнем уравнения $7z - 12 = 3 + z + 15$;

г) число $-1,5$ не является корнем уравнения $10b - 3 + 4 = 6 + 8b - 2$.

338 Решите уравнение:

а) $x + \frac{5}{2} = \frac{4x + 3}{4} - \frac{1 - 3x}{8}$;

д) $\frac{5a - 14}{25} - \frac{3a - 5}{20} = a - 1,26$;

б) $\frac{3y + 12}{4} = 3 - \frac{5y - 7}{3}$;

е) $\frac{b + 4}{5} - b + 5 = \frac{b + 3}{3} - \frac{b - 2}{2}$;

в) $\frac{7z}{12} + \frac{2 - z}{4} - 1 = \frac{5z - 6}{9} - \frac{1}{2}$;

ж) $\frac{8 - c}{6} - \frac{5 - 4c}{3} = \frac{c + 6}{2}$;

г) $\frac{5t + 1,75}{3} - t - \frac{t - 3}{8} = \frac{t}{16}$;

з) $\frac{9 + 7d}{2} - 1 + \frac{1 - 2d}{7} = 3d$.

339 При каком значении a уравнение $3a - 9x = 4x - 8$ имеет корень:

а) $x = -1$;

б) $x = 3$;

в) $x = 0$;

г) $x = 2$?

340 Запишите три уравнения, корнем которых является число a :

а) $a = 1$;

б) $a = -5$;

в) $a = 4,5$;

г) $a = -0,5$.

341 Имеет ли уравнение корни при указанном значении a ?

а) $8x - a = 4(2x - 5)$, $a = -3$;

в) $3(x - 2) - a = 3x + 11$, $a = 4$;

б) $-3x + 3a = 9 - 3x$, $a = -6$;

г) $9x - a = 3(4x + 4) - 3x$, $a = 7$.

При каком значении a уравнение будет иметь корни?

342 Найдите корни уравнения:

а) $6(x + 3) = 2(x + 23)$;

в) $7(6 - 2t) = 21(4 - t)$;

б) $5(y - 4) = 10(y - 8)$;

г) $4(2z - 8) = 6(6 + 2z)$.

343 а) На сколько нужно уменьшить число 8642, чтобы получить число, записанное теми же цифрами в обратном порядке?

б) Найдите натуральное число, восьмая часть от которого на 3 меньше его шестой части.

в) Найдите целое число, которое при увеличении на 6,25 дает тот же результат, что и при умножении на 7,25.

344 При каком значении x указанные равенства не имеют смысла?

а) $-3 = \frac{2}{x+6}$;

б) $\frac{12}{x-11} = 7$;

в) $\frac{9}{z+8} = 19$;

г) $\frac{11}{x} = \frac{3}{8}$.

345 Решите уравнение:

а) $\frac{18}{x} = 6$;

в) $\frac{8}{z-5} = \frac{9}{z-6}$;

д) $\frac{5(5+3a)}{6a+3,5} = 2$;

б) $\frac{24}{y} = 4$;

г) $\frac{1}{t-1} = \frac{-2}{t-2}$;

е) $\frac{5(b+2)}{9(b+1)} = \frac{2}{3}$.

346 Какое число нужно подставить вместо a , чтобы уравнение имело указанный корень?

а) $ax + 3 = 7x - 8$, если корень уравнения $x = 1$;

б) $3ay - 5 = 4y - 7$, если корень уравнения $y = -1$;

в) $\frac{2z}{a} - \frac{1}{2} = \frac{3z}{4} - \frac{3}{8}$, если корень уравнения $z = \frac{1}{3}$;

г) $\frac{4a}{3} + \frac{2}{7} = t - \frac{2}{3}$, если корень уравнения $t = -\frac{1}{7}$.



347 Докажите, что данное уравнение не имеет корней:

а) $7(x + 3) + 8(x + 4) = 15(x + 6)$;

в) $9(2z + 2) + 4(z - 7) - 2(11z - 9) = 0$;

б) $3(y - 5) + 5(6 - 2y) = -7(y + 3)$;

г) $3(7t - 4) - 4(6t + 2) + 3(t + 2) = 0$.

348 Докажите, что решением данного уравнения является любое число:

а) $4(2x - 1) - 3(2x - 7) = 17 + 2x$;

в) $9(2z - 1) + 5(3z + 1) = 3(11z - 1) - 1$;

б) $6(3 - 5y) + 12(y - 3) + 18 + 18y = 0$;

г) $7(4t + 5) - 8(4 - 5t) - 3 - 68t = 0$.

349 а) Трем братьям вместе 48 лет. Средний из них в 2 раза старше младшего. А старшему столько лет, сколько среднему и младшему вместе. Сколько лет каждому из братьев?

б) Пассажирский поезд шел со скоростью 72 км/ч. Пассажир, смотревший в окно, заметил, что встречный товарный поезд, длина которого равна 500 м, проехал мимо него за 15 с. С какой скоростью ехал товарный поезд?

в) По окружности длиной 378 см движутся навстречу друг другу два муравья, один со скоростью 10 см/с, а другой со скоростью 8 см/с. Через какие промежутки времени будут происходить их встречи? Через какие промежутки времени будут происходить их встречи, если один из муравьев будет двигаться в противоположном направлении?

350 Какое число можно подставить вместо b , чтобы корнем уравнение было целое число?

а) $\frac{x+3}{5} = b$; б) $\frac{7y-4}{6} = b$; в) $b(z+5) = 21$; г) $b(t-3) = -2$.

351 Какое число можно подставить вместо c , чтобы корнем уравнения было четное число?

а) $\frac{3x+2}{7} = c$; б) $\frac{4y+9}{7} = c$; в) $c(z-8) = 36$; г) $c(t+7) = -5$.

352 Решите уравнение:

а) $\frac{3x-2}{5-x} = \frac{3(x+3)}{2-x}$; в) $\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{z+2}{3} + 4 \right) + 6 \right) + 8 \right) = 1$;
 б) $\frac{8t-5}{8t+5} = \frac{3t+7}{3t+2}$; г) $\frac{4}{11} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{y-1}{3} + 5 \right) + 3 \right) - 2 - y = 0$.

353 Найдите корни уравнения:

а) $(x+2)^2 - (x-3)^2 = 75$; в) $32 - (a+4)^2 = -(a+8)^2$;
 б) $(y-7)^2 - (y-3)^2 = 96$; г) $(b+10)(10-b) = 20(10-b) - b^2$.

354 Найдите значение выражения при данных значениях переменных:

а) $-(3a+4)(4a-5) + (6a+21)(2a-7)$ при $a = 63$;
 б) $(b+11)(4b-8) - (9+2b)^2$ при $b = -87,29$.

355 Докажите высказывание:

а) Если a, b, c делятся на n , то $6a - 21c + 15b$ делится на $3n$ ($a, b, c, n \in \mathbb{Z}$).
 б) Если a делится на 7, b делится на 11, то $11a + 7b$ делится на 77 ($a, b \in \mathbb{Z}$).

356 Найдите множество целых решений неравенства:

а) $x - 3 > 4$; в) $1 < z \leq 7$; д) $|a - 5| < 2$;
 б) $y + 2 \leq -3$; г) $-6 \leq t < -2$; е) $|b + 3| \geq 5$.

357 Разложите многочлен на множители:

а) $x^4 - 3x^3 + 4x - 12$; в) $a^3 + 64c^3 + a^2 - 4ac + 16c^2$;
 б) $y^3 + 64 + 8y^2 + 32y$; г) $b^3 - 7b^2 - 9b + 63$.

358 В пончиковой компании Антона и Ксюши продаются пончики двух сортов: по цене 60 р. за кг и по цене 30 р. за кг. В течение месяца было продано тех и других пончиков на одинаковую сумму. По какой средней цене продавали пончики в этот месяц?

359 Разбейте множество $\{1, 11, 13, 19, 22, 44\}$ на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась сумме чисел в другой.

360 Докажите, что A делится на B :

$A = 241,5 : 2,3 - 36 \cdot (17,2 \cdot 0,125 - (2\frac{32}{45} - 1\frac{7}{60})) + 25 : \frac{1}{2}$;
 $B = (0,5 - 0,375) : \frac{1}{8} - (3\frac{5}{6} - 3\frac{7}{12}) : (0,358 - 0,108) + 15$.



С

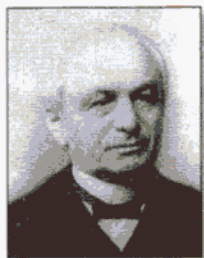
361* Вызвал царь трех богатырей – Илью Муромца, Добрыню Никитича и Алешу Поповича и спросил их, кто из них убил Соловья-разбойника. Илья Муромец сообщил, что Соловья-разбойника убил Добрыня Никитич. Добрыня Никитич сказал, что Соловья-разбойника убил Алеша Попович, а Алеша Попович сообщил, что Соловья-разбойника убил он. Сможет ли царь определить, кто убил Соловья-разбойника, если он знает, что только один богатырь сказал правду, а остальные соврали?

362*

К переправе подошли три странника и три людоеда. Оказалось, что на переправе имеется только одна лодка, которая может вместить лишь двух человек. Странники боятся остаться в меньшинстве. Только один странник и один людоед умеют грести. Каким образом они могут переправиться с учетом их пожеланий и возможностей?



2. Решение уравнений с модулями



*Подлинно, мы по призванию поэты,
только удел наш – все, что свободно творим мы,
строго потом доказать.*

Леопольд Кронекер (1823–1891),
немецкий математик

При решении многих задач возникает необходимость рассматривать несколько разных вариантов возможной взаимосвязи величин. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим следующую задачу:

Задача 1.

Частное двух рациональных чисел равно 5. Известно, что одно из этих чисел на 16 больше другого. Найдите эти числа.

Решение:

Обозначим одно из чисел через x , где $x \in \mathbb{Q}$, тогда второе число равно $5x$.

Для того чтобы составить математическую модель задачи, мы должны записать, что разность между большим и меньшим числом равна 16. Возможны два случая: если $5x \geq x$, то мы получим, что $5x - x = 16$; если же $5x < x$, то $x - 5x = 16$. И так как в условии нет уточнения, какой из этих случаев имеется в виду, мы должны рассмотреть оба.

Эти два случая можно объединить в единой записи, используя понятие модуля числа. Выражение $|5x - x|$ как раз по определению и будет означать, что:

$$|5x - x| = \begin{cases} 5x - x, & \text{если } 5x \geq x; \\ x - 5x, & \text{если } 5x < x \end{cases}$$

Теперь мы можем записать математическую модель нашей задачи короче:

$$\begin{cases} |5x - x| = 16 \\ x \in \mathbb{Q} \end{cases} \longrightarrow 5x = ? \quad x = ?$$

В итоге исходная задача свелась к решению уравнения $|5x - x| = 16$, содержащего модуль. Пользуясь определением модуля числа, решение этого уравнения можно записать следующим образом.

1) Если $5x \geq x$, то

$$5x - x = 16 \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow \underline{x = 4} \Leftrightarrow \underline{5x = 20}$$

2) Если $5x < x$, то

$$x - 5x = 16 \Leftrightarrow -4x = 16 \Leftrightarrow \underline{x = -4} \Leftrightarrow \underline{5x = -20}$$

Следовательно, задача имеет два решения: первое – искомые числа равны 4 и 20, второе – искомые числа равны (-4) и (-20).

Ответ: 4 и 20 или -4 и -20.

Рассмотрим теперь общий способ решения линейного уравнения вида $|kx + b| = c$, где x – переменная величина, а $k, b, c \in \mathbb{Q}$ и $k \neq 0$.

Если $c < 0$, то уравнение $|kx + b| = c$ не имеет решений, так как модуль числа не может принимать отрицательные значения.

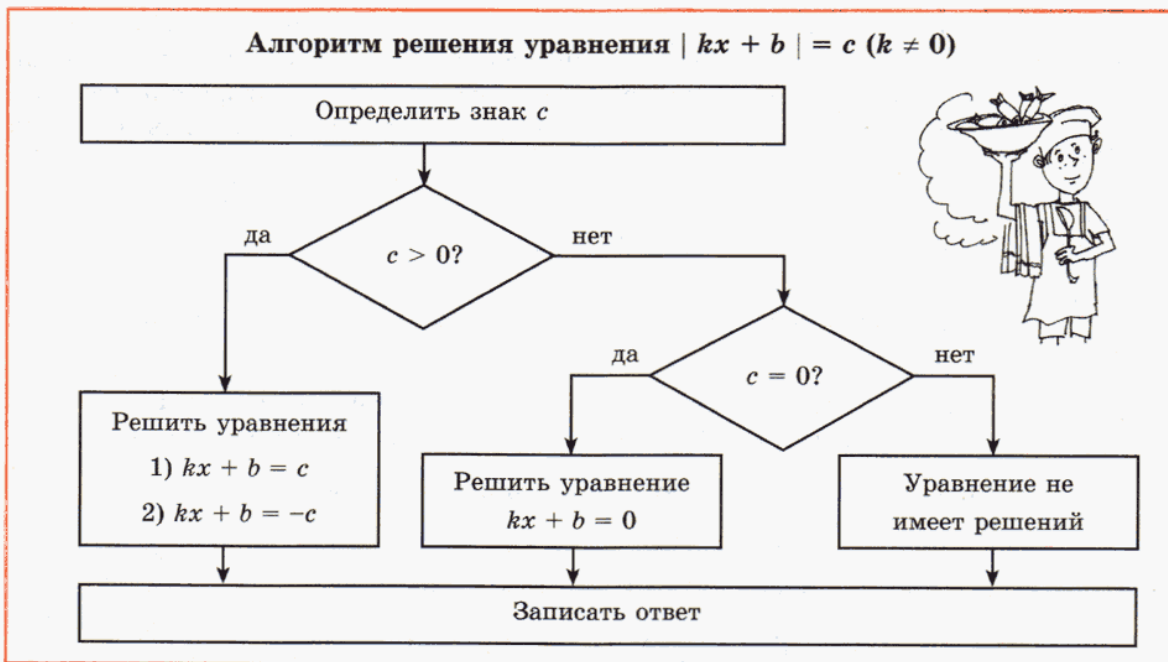
Если $c = 0$, то уравнение принимает вид $kx + b = 0$. Значит, при $k \neq 0$ оно имеет единственный корень $x = -\frac{b}{k}$.

Если же $c > 0$, то выражение под знаком модуля может принимать значения c и $-c$. Значит, возможны два случая:

$$1) kx + b = c \Leftrightarrow x = \frac{c - b}{k};$$

$$2) kx + b = -c \Leftrightarrow x = \frac{-c - b}{k}.$$

Алгоритм решения уравнений данного типа можно записать следующим образом.



Рассмотрим теперь более сложное уравнение вида $|ax + b| = |cx + d|$, где a, b, c, d – некоторые числа. Сначала разберем решение конкретного уравнения такого типа, а затем запишем общий алгоритм.

Задача 2.Решите уравнение: $|2x - 5| = |3x + 6|$.*Решение:*

Согласно определению модуля указанное равенство возможно в следующих случаях:

- 1) $2x - 5 = 3x + 6$; 2) $2x - 5 = -(3x + 6)$;
 3) $-(2x - 5) = -(3x + 6)$; 4) $-(2x - 5) = 3x + 6$.

Заметим, что уравнения 1) и 3) равносильны, значит, они имеют одинаковые корни. Аналогичное наблюдение может быть сделано относительно уравнений 2) и 4). Значит, для решения исходного уравнения нам достаточно найти корни двух уравнений 1) и 2):

- 1) $2x - 5 = 3x + 6 \Leftrightarrow 2x - 3x = 6 + 5 \Leftrightarrow -x = 11 \Leftrightarrow x = -11$;
 2) $2x - 5 = -(3x + 6) \Leftrightarrow 2x - 5 = -3x - 6 \Leftrightarrow 2x + 3x = 5 - 6 \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -0,2$.

Ответ: $\{-11; -0,2\}$.

Общий алгоритм решения таких уравнений можно записать следующим образом.

Алгоритм решения уравнения вида $|ax + b| = |cx + d|$,
где a, b, c, d — некоторые числа

1. Найти корни уравнения $ax + b = cx + d$.
2. Найти корни уравнения $ax + b = -(cx + d)$.
3. В ответе записать множество найденных корней.

Линейные уравнения с модулями могут иметь более сложный вид, например, включать более двух модулей, содержать выражения вне знака модуля. При решении таких уравнений сначала выделяют промежутки, на которых выражения под знаком модуля не меняют свой знак, а затем уже ищут решения на каждом из выделенных промежутков.

Задача 3.Решите уравнение: $|x - 1| + |x + 4| = 5$.*Решение:*

Сначала, пользуясь определением модуля, запишем, что означают выражения, содержащие знаки модуля.

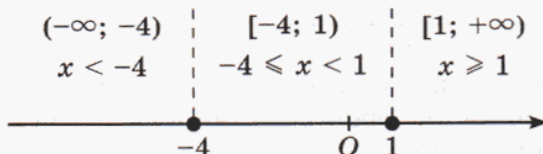
$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x \geq 1; \\ 1 - x, & \text{если } x < 1 \end{cases} \quad |x + 4| = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x \geq -4; \\ -x - 4, & \text{если } x < -4 \end{cases}$$

Точки 1 и (-4) разбивают числовую прямую на три промежутка:

$$(-\infty; -4), [-4; 1) \text{ и } [1; +\infty).$$

Отметим выделенные промежутки на числовой прямой:

Числовые	$(-\infty; -4)$	$[-4; 1)$	$[1; +\infty)$
промежутки	$x < -4$	$-4 \leq x < 1$	$x \geq 1$



На каждом из указанных промежутков данные выражения с модулем можно записать без знака модуля:

Выражения \ Промежутки	$(-\infty; -4)$	$[-4; 1)$	$[1; +\infty)$
$ x - 1 $	$1 - x$	$1 - x$	$x - 1$
$ x + 4 $	$-x - 4$	$x + 4$	$x + 4$

Будем искать решение нашего уравнения на каждом из выделенных числовых промежутков.

1) $x < -4$, или $x \in (-\infty; -4)$

На этом промежутке $|x - 1| = 1 - x$, а $|x + 4| = -x - 4$. Значит, исходное уравнение может быть записано в виде:

$$(1 - x) + (-x - 4) = 5 \Leftrightarrow 1 - x - x - 4 = 5 \Leftrightarrow -2x = 8 \Leftrightarrow x = -4.$$

Однако полученное число -4 не принадлежит рассматриваемому промежутку: $-4 \notin (-\infty; -4)$. Поэтому на данном промежутке уравнение не имеет корней.

2) $-4 \leq x < 1$, или $x \in [-4; 1)$

В этом случае уравнение может быть записано в виде:

$$(1 - x) + (x + 4) = 5 \Leftrightarrow 1 - x + x + 4 = 5 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0.$$

Полученное уравнение верно при любом значении x . Следовательно, любое число, принадлежащее промежутку $[-4; 1)$, является корнем исходного уравнения.

3) $x \geq 1$, или $x \in [1; +\infty)$

На данном промежутке уравнение принимает вид:

$$(x - 1) + (x + 4) = 5 \Leftrightarrow x - 1 + x + 4 = 5 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

И так как $1 \in [1; +\infty)$, то число $x = 1$ является корнем исходного уравнения.

Таким образом, множество корней исходного уравнения представляет собой объединение всех чисел полуинтервала $[-4; 1)$ и числа 1, то есть числовой отрезок $[-4; 1]$.

Ответ: $x \in [-4; 1]$.

Заметим, что при решении задачи мы использовали числовую прямую лишь для того, чтобы определить на ней взаимное расположение чисел (-4) и 1 и понять, на какие числовые промежутки эти числа разбивают всю числовую прямую. Поэтому при решении уравнений с модулями в дальнейшем мы будем использовать «упрощенную» модель числовой прямой. На этой модели мы будем отмечать лишь взаимное расположение интересующих нас точек относительно друг друга и не будем фиксировать точные координаты данных точек.

Обобщая рассмотренный нами способ решения уравнения с модулями, приходим к следующему алгоритму.



Алгоритм решения уравнения с модулями

1. Найти в уравнении все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Приравнять каждое из этих выражений к нулю и найти корни полученных уравнений.
3. Отметить найденные корни уравнений на «упрощенной» модели числовой прямой и определить непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные точки разбивают числовую прямую.
4. Проверить, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую.
5. Установить для всех числовых промежутков, чему равно значение каждого модуля – самому выражению, содержащемуся под знаком модуля, или выражению, противоположному ему.
6. Для каждого числового промежутка записать и решить исходное уравнение без знаков модуля.
7. Проверить, что полученные корни принадлежат числовому промежутку, для которого было записано уравнение.
8. В ответе записать множество всех получившихся корней.



Рассмотрим, как с помощью данного алгоритма можно решить более сложные уравнения, содержащие модули.

Задача 4.

Решите уравнение: $|x - 2| + |x + 6| - |-x - 9| = -2x - 7$.

Решение:

1. Под знаком модуля находятся выражения: $x - 2$, $x + 6$ и $-x - 9$.

2. Найдем корни уравнений:

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

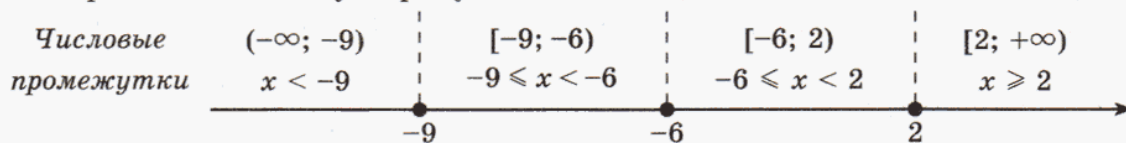
$$x + 6 = 0$$

$$x = -6$$

$$-x - 9 = 0$$

$$x = -9$$

3. Отметим найденные корни уравнений на «упрощенной» модели числовой прямой и определим непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные числа разбивают числовую прямую.



4. Проверим, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую:

$$(-\infty; -9) \cup [-9; -6) \cup [-6; 2) \cup [2; +\infty) = (-\infty; +\infty).$$

5. Установим для всех числовых промежутков, чему равно значение каждого модуля. Для этого можно воспользоваться определением модуля каждого из выражений.

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{если } x \geq 2; \\ 2 - x, & \text{если } x < 2 \end{cases}$$

$$|x + 6| = \begin{cases} x + 6, & \text{если } x \geq -6; \\ -x - 6, & \text{если } x < -6 \end{cases}$$

$$|-x - 9| = \begin{cases} x + 9, & \text{если } x \geq -9; \\ -x - 9, & \text{если } x < -9 \end{cases}$$



Полученные результаты запишем в таблице:

Выражения \ Промежутки	$(-\infty; -9)$	$[-9; -6)$	$[-6; 2)$	$[2; +\infty)$
$ x - 2 $	$2 - x$	$2 - x$	$2 - x$	$x - 2$
$ x + 6 $	$-x - 6$	$-x - 6$	$x + 6$	$x + 6$
$ -x - 9 $	$-x - 9$	$x + 9$	$x + 9$	$x + 9$

6–7. Теперь для каждого числового промежутка запишем и решим уравнение, равносильное исходному и не содержащее знаков модуля. Каждый из полученных корней проверяем на принадлежность рассматриваемому числовому промежутку.

1) $x < -9$, или $x \in (-\infty; -9)$

$$(2 - x) + (-x - 6) - (-x - 9) = -2x - 7$$

$$2 - \cancel{x} - x - 6 + \cancel{x} + 9 = -2x - 7$$

$$-x + 2x = -2 + 6 - 9 - 7$$

$$x = -12$$

$$-12 \in (-\infty; -9)$$

$$x = -12 \text{ — корень уравнения}$$

2) $-9 \leq x < -6$, или $x \in [-9; -6)$

$$(2 - x) + (-x - 6) - (x + 9) = -2x - 7$$

$$2 - x - x - 6 - x - 9 = -2x - 7$$

$$-3x + 2x = -2 + 6 + 9 - 7$$

$$x = -6$$

$$-6 \notin [-9; -6) \text{ Нет корней}$$

3) $-6 \leq x < 2$, или $x \in [-6; 2)$

$$(2 - x) + (x + 6) - (x + 9) = -2x - 7$$

$$2 - \cancel{x} + \cancel{x} + 6 - x - 9 = -2x - 7$$

$$-x + 2x = -2 - 6 + 9 - 7$$

$$x = -6$$

$$-6 \in [-6; -2)$$

$$x = -6 \text{ — корень уравнения}$$

4) $x \geq 2$, или $x \in [2; +\infty)$

$$(x - 2) + (x + 6) - (x + 9) = -2x - 7$$

$$x - 2 + \cancel{x} + 6 - \cancel{x} - 9 = -2x - 7$$

$$x + 2x = 2 - 6 + 9 - 7$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} \notin [2; +\infty) \text{ Нет корней}$$

Таким образом, корнями нашего уравнения являются $x = -12$ и $x = -6$.

8. Ответ: $\{-12; -6\}$.

К

363 1) Найдите расстояние от начала координат O до точек A и B координатной прямой:

а) $A(3), B(8)$;

б) $A(-3), B(8)$;

в) $A(3), B(-8)$;

г) $A(-3), B(-8)$.

2) Как с помощью модуля можно записать расстояние от точек A и B до начала координат?

3) Запишите с помощью знака модуля расстояние между точками A и B и вычислите его.

364 Найдите значение выражения:

а) $|-5| + |-7|$;

г) $|-3,2| \cdot |2|$;

ж) $|-1,1| \cdot |-5| : 11$;

б) $-|4,2| + |3,6|$;

д) $|-6,4| \cdot |-0,5|$;

з) $3,9 : |-1,3| \cdot |4,1|$;

в) $-|1,8| - |-3| + |-1,5|$;

е) $|8,1| : |-3|$;

и) $|-7,6| \cdot |-7| : |-1,9|$.

365 Решите уравнение, пользуясь определением модуля:

а) $|x| = 5$;

в) $|-z| = 2,1$;

д) $|2a| = 0$;

ж) $-|d| = -7$;

б) $|y| = -4$;

г) $|-t| = -3,4$;

е) $|-3b| = 0$;

з) $-|2,1s| = 3$.

- 366** 1) Решите уравнение, содержащее переменную под знаком модуля:
 а) $|x - 4| = 2$; б) $|2x + 9| = -1$; в) $|-3 - 6x| = 0$.
 2) Предложите свой алгоритм решения уравнения $|kx + b| = c$ при $k \neq 0$, а затем сравните его с алгоритмом, предложенным в учебнике на стр. 77.

367 Найдите корни уравнения:

- а) $|3x + 5| = 2$; г) $|3 + 2a| = -4$; ж) $|u + 6 - 4u| = 3$;
 б) $|2y - 7| = 5$; д) $|-3c - 18| = 0$; з) $-|-3 - 5d + 11| = 12$;
 в) $|-3 - 5z| = 0$; е) $-|-6b - 4| = 3$; и) $|6k - 2 + 7k + 1 - 3k| = -7$.

368 Докажите, что:

- а) число (-2) является корнем уравнения $|x - 3| = 5$;
 б) число 1 не является корнем уравнения $|y + 6| = |3 - y|$;
 в) уравнение $|a - 2| + 1 = 0$ не имеет корней;
 г) уравнение $|5b| = |5b + 10|$ имеет единственный корень;
 д) уравнение $|c - 4| = |4 - c|$ имеет по меньшей мере 10 корней;
 е) уравнение $|2d - 7| = |d - 2|$ имеет ровно два корня.



369 Найдите корни уравнения:

- а) $|x + 12| = |x - 10|$; ж) $|4a - 5| = |3a + 6|$;
 б) $|y - 8| = |4 - y|$; з) $-|10b - 27| = |20 - 4b|$;
 в) $|z + 9| = -|z + 3|$; и) $-|7c - 6 - 5c| = -|4 - 3c + 2 - c|$;
 г) $-|s + 5| = |-s - 5|$; к) $|12d + 16 - 8d| = |5 - 4d + 3|$;
 д) $-|3 - r| = -|r - 6|$; л) $|3m + 12| = -|8m + 3 - 9m - 7|$;
 е) $|15 - t| = |t - 15|$; м) $-|14 - 5n - 10 + 8n| = -|6 - 4n + n - 10|$.

370 При каких значениях переменной равны значения указанных выражений?

- а) $|7x - 1|$ и $|3x + 4|$; в) $|5z + 2|$ и $|5z - 2|$; д) $|12 + 2b|$ и $-|b - 1|$;
 б) $|2y - 9|$ и $|4y + 3|$; г) $|3 + 8a|$ и $|-8a - 3|$; е) $-|8 + c|$ и $-|10 - 3c|$.

371 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $|a - 7|$ равно 3;
 б) значение выражения $|28 - 4b|$ равно -5 ;
 в) значение выражения $|2c - 6|$ равно значению выражения $|3c + 3|$;
 г) значение выражения $|5d + 4|$ противоположно значению выражения $|2 - 9d|$?

372 Составьте уравнение и решите задачу:

- а) Частное двух рациональных чисел равно 2, при этом одно из этих чисел на 8 больше другого. Найдите эти числа.
 б) Разность двух рациональных чисел равна 3, при этом модуль одного из этих чисел в 2 раза больше модуля другого числа. Найдите эти числа.
 в) Сумма двух рациональных чисел равна 8, при этом модуль одного из этих чисел в 3 раза меньше модуля другого числа. Найдите эти числа.
 г) Одно рациональное число на 5 больше другого, при этом модуль одного из этих чисел равен модулю другого. Найдите эти числа.

373 Найдите корни уравнения:

а) $|x - 1| + |x - 3| = 2$;

д) $|7 - q| + |q - 6| = 4$;

б) $|y + 5| + |y - 2| = 7$;

е) $|-4 + r| - |r + 11| = 17$;

в) $|z| - |z - 2| = 3$;

ж) $|9 - s| - |11 - s| = 10$;

г) $|p - 6| - |p - 4| = 5$;

з) $|8 + t| - |4 - t| = -6$.

374 Докажите, что:

а) число (-1) является корнем уравнения $|x - 3| + |x + 4| = 7$;

б) число 2 не является корнем уравнения $|2y - 1| - |y + 3| = 2$;

в) уравнение $|2a + 5| = |4 - 2a| + 1$ не имеет других корней, кроме $a = 0$;

г) уравнение $|3z - 8| - |3z - 2| = -6$ имеет по крайней мере 5 корней.

375 Решите уравнение:

а) $|5x - 4| - |6x - 9| = 1$;

ж) $|2x + 2| - 1 = |2x + 1| - 1$;

б) $|1 - 4y| - |3y + 9| = 5$;

з) $|2y - 4| + 4 = 3 - |7y + 13|$;

в) $|5 - 12z| + |5z + 18| = -7$;

и) $|4z - 3| - 7 = 2 - |12 + 4z|$;

г) $|2t + 8| - |7 - t| = -1$;

к) $3 - |3 - 5t| = 4 - |5 - 5t|$;

д) $|5a + 4| = 2 + |3a - 6|$;

л) $|2a - 5| + 7 = |a + 8| + 4$;

е) $3 - |2b - 2| = |5 - 2b|$;

м) $|6b - 4| - 2 = 3 + |2b + 9|$.

376 Имеет ли уравнение корни при указанном значении a ?

а) $|3x - a| = |2x - 3|$, если $a = 3$;

г) $|2p + 6 - a| = |2p + 6|$, если $a = -2$;

б) $|y + 2a| = |y + 8|$, если $a = -2$;

д) $|3q - a| = |5q - 2 - 2q|$, если $a = -9$;

в) $|5z + 3| = |5z + 2a|$, если $a = -1,5$;

е) $|6r - 3 - 3r| = |3r + a|$, если $a = 3$.

377 При каких значениях переменной:

а) значение выражения $|2x + 4|$ на 3 больше значения выражения $|x + 5|$;

б) значение выражения $|12y - 6|$ на 7 меньше значения выражения $|5y + 20|$?

378 Найдите корни уравнения:

а) $|x + 8| + |x - 3| + |x + 2| = 1$;

г) $|a - 15| + |a - 21| + |a + 19| = -7$;

б) $|y - 5| - |y + 1| + |y - 4| = -2$;

д) $|b + 7| - |11 - b| = |b + 4| - 6$;

в) $|z + 4| - |z - 6| - |z + 9| = 5$;

е) $|c - 12| = 4 - |c - 2| + |c - 3|$.

379 Докажите, что данное уравнение не имеет корней:

а) $|3x - 6| + |8x - 4| + |5x + 10| = 3$;

г) $6 + |7b - 5| = 5 - |2b + 7| - |4 - 15b|$;

б) $|4y + 1| - |2y + 5| + |6y - 12| = -4$;

д) $|-7 - 6r| - |9r + 5| - |4r - 9| = 5$;

в) $|2z + 7| - |5z - 12| - |3z + 9| = 4$;

е) $|7t - 21| + |9t - 36| + |11t + 22| = -1$.

380 При каких значениях переменной указанные равенства являются истинными высказываниями?

а) $|5x + 10| + |6x - 12| = |9x + 3|$;

в) $|6z - 2| = |2z + 1| + |4z - 8|$;

б) $|6a + 3| - |13 - 2a| = |4a + 12| - 2$;

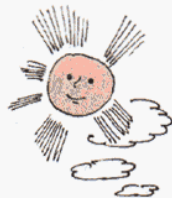
г) $6 - |5d - 1| - |2d + 3| = |2d - 7|$.

381 Докажите, что данное уравнение имеет не менее десяти решений:

- а) $|5x - 12| - |3x - 1| = |11 - 2x|$; в) $|2c - 9| + 7 = |9 - 6c| - |4c - 7|$;
 б) $|8 - 3y| - |11y - 4| + |3 + 8y| = -1$; г) $|3t + 5| = |1 - 6t| - |6 - 3t|$.

382 Решите уравнение:

- а) $|x + 4| + |x - 1| + |x + 2| + |x - 2| = 3$;
 б) $|y - 7| - |y + 2| + |y - 3| - |y + 5| = -6$;
 в) $|z + 3| - |z - 9| - |z + 7| + |z + 8| = 13$;
 г) $|s + 2| - |s - 4| - |s + 11| - |s - 14| = 7$;
 д) $|a - 17| + |a - 3| + |a + 1| + |a + 12| = -4$;
 е) $|b + 5| - |8 - b| - |4 - b| = |b + 7| - 6$;
 ж) $|c - 1| = 9 - |c - 3| + |c - 2| + |c - 6|$;
 з) $|p + 8| - |p - 7| = |p - 11| - |p - 6| + 14$.



383 Найдите корни уравнения:

- а) $|2x + 6| - |3x - 9| + |5x + 5| + |4x - 6| = 5$;
 б) $|3y - 12| + |2y + 6| + |4y - 6| - |5y + 8| = 4$;
 в) $|5z + 15| + |2z - 7| - |6z + 6| - |7z + 14| = 9$;
 г) $|5a - 20| + |9a - 4| + |6a + 1| + |7a + 15| = -12$;
 д) $|3b + 1| - |4 - 2b| - |6 - 12b| = |4b + 8| - 1$;
 е) $|4c - 1| - |5c - 10| = |3c - 12| + |7c + 14| - 48$.



384 Найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению:

- а) $|x + a| = 2$; б) $|x - p| = 6$; в) $|7x - c| = 4$; г) $|5x + d| = -9$.

π

385 Вычислите рациональным способом:

- а) $\frac{254 \cdot 399 - 145}{254 + 399 \cdot 253}$; в) $2\frac{11}{13} : 2\frac{2}{5} \cdot 18\frac{13}{17} \cdot \left(15\frac{3}{37} - \frac{558}{37}\right) : 14\frac{15}{31}$;
 б) $\frac{630 \cdot 137 + 2}{316 + 315 \cdot 136}$; г) $7\frac{5}{98} \cdot 8\frac{14}{93} \cdot \left(\frac{937}{58} - 16\frac{9}{58}\right) : 21\frac{5}{93} \cdot 28\frac{7}{14}$.

386 а) Целое число a кратно 7. Может ли остаток при делении этого числа на 14 быть равен 5?

б) Целое число b при делении на 36 дает остаток 3. Найдите остаток при делении числа b на 2, 3, 4, 6, 9, 12.

в) Число m — четное, а число n — нечетное. Какой остаток при делении на 2 дают числа: $m^2 + n$, $m + n^2$, $m^2 + n^2$, $m^2 - n^2$?

387 На координатной плоскости Oxy постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

- а) $x > 5$; $y \leq -2$; в) $-5 \leq x < 6$; $2 < y \leq 9$; д) $x \leq -4$; $-2 \leq y \leq 7$;
 б) $x \leq -1$; $y > -3$; г) $4 \leq x < 9$; $y > -6$; е) $|x| \leq 5$; $|y| > 3$.

396 Найдите множество решений уравнения:

- а) $|x + 7| = |x - 9|$; в) $|z + 3| = -|z + 12|$; д) $-\lvert 9b - 18 \rvert = -\lvert 16 - 8b \rvert$;
б) $|y - 5| = |11 - y|$; г) $-\lvert 5a - 1 \rvert = \lvert -4a + 0,8 \rvert$; е) $\lvert 8c + 2 - 4c \rvert = \lvert 5 + 3c + 4 \rvert$.

397 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $|a + 7|$ равно 6;
б) значение выражения $|25 - 5b|$ равно 11;
в) значение выражения $|3c - 18|$ равно значению выражения $|6c + 24|$;
г) значение выражения $|21d + 35|$ противоположно значению выражения $|12 - 6d|$?

398 При каких значениях переменной равны значения указанных выражений?

- а) $|6x - 3|$ и $|5x + 7|$; б) $|3y - 15|$ и $|5 - y|$; в) $|9z + 27|$ и $-\lvert z + 3 \rvert$.

399 Найдите корни уравнения:

- а) $|x - 5| + |x - 2| = 3$; в) $|9 - z| + |z + 1| = 12$;
б) $|y + 4| + |y - 3| = 2$; г) $-\lvert 6 + t \rvert - \lvert t + 12 \rvert = 28$.

400 Решите уравнение:

- а) $|7x - 2| + |5x + 2| = 6$; д) $|3x + 5| - 2 = |3x + 6| - 3$;
б) $|3 - 6y| - |5y + 10| = 4$; е) $|5y - 2| + 3 = 7 - |6y + 12|$;
в) $|9 - 14z| + |11z + 19| = -11$; ж) $|6z - 3| + 8 = 5 - |3 + z|$;
г) $|3t + 15| - |4 - t| = -3$; з) $9 - |7 - 2t| = 8 - |2 - t|$.

401 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $|4x + 5|$ на 12 больше значения выражения $|2x - 3|$;
б) значение выражения $|4y - 8|$ на 2 меньше значения выражения $|2y + 10|$?

402 Составьте уравнение и решите задачу:

- а) Частное двух рациональных чисел равно 8, при этом одно из этих чисел на 21 больше другого. Найдите эти числа.
б) Одно из двух загаданных рациональных чисел на 10 больше другого, а сумма их модулей равна 16. Найдите эти числа.

403 Найдите корни уравнения:

- а) $|x + 3| + |x - 1| + |x + 5| = 3$; в) $|z - 14| + |z - 9| + |z + 18| = -5$;
б) $|y - 6| - |y + 4| + |y - 7| = -7$; г) $|t + 6| - |5 - t| = |t + 7| - 11$.

404 При каких значениях переменной указанные равенства являются истинными высказываниями?

- а) $|2x - 8| + |3x - 18| + |7x + 14| = 38$; в) $|3z + 9| - |12 - 4z| = |5z + 2| - 4$;
б) $|5y + 4| - |3y + 21| + |7y - 28| = -2$; г) $|4t - 20| = 8 - |9t - 2| + |10t - 7|$.

405 Решите уравнение:

- а) $|x + 9| + |x - 3| + |x + 7| + |x - 4| = 8$;
 б) $|y - 5| - |y + 4| + |y - 1| - |y + 2| = -6$;
 в) $|z - 14| + |z - 13| + |z + 12| + |z + 11| = -10$;
 г) $|t + 4| - |t - 6| = 6 - |t - 8| + |t - 2|$;
 д) $|4x + 16| - |7x - 14| + |6x + 12| + |3x - 9| = 57$;
 е) $|8y - 24| + |2y + 10| + |5y - 10| - |y + 7| = 11$;
 ж) $|11z + 22| + |3z - 15| - |z + 5| - |4z + 24| = 32$;
 з) $|2t - 4| - |6t - 30| = 7 + |9t - 36| + |8t - 64|$.



406 а) Целое число a кратно 9. Может ли остаток при делении этого числа на 27 быть равен 11?

б) Целое число b при делении на 14 дает остаток 8. Найдите остаток при делении числа b на 2, на 7.

407 На координатной плоскости Oxy постройте множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

- а) $x > -3$; $y \leq 4$; в) $2 \leq x < 9$; $-3 < y \leq 5$; д) $x > 3$; $-9 \leq y \leq -2$;
 б) $x \leq 5$; $y < -1$; г) $-8 \leq x < -1$; $y \leq 1$; е) $|x| > 7$; $|y| < 5$.

408 Упростите выражение:

- а) $8m - (5m + (7m - (10m - 2m)))$;
 б) $a + (4b - (a - (3c - 3b) + 2c + (a - 2b - c)))$;
 в) $x - (2y + (3z - 3x - (x + z))) - (2x - (y + 3z))$;
 г) $7p - (2p + (q - 3p + (5q - 2p) - 4p) - 2q)$.



409 Разложите многочлен на множители:

- а) $m^6 + 6m^3y^4 + 9y^8$; д) $27p^3 - 27p^2q + 9pq^2 - q^3$;
 б) $4p^{12} - 20p^6z^5 + 25z^{10}$; е) $125n^3 + 75n^2m + 15nm^2 + m^3$;
 в) $16n^6 - 81m^{10}$; ж) $8x^9 + 125y^6$;
 г) $16a^2b^2 - 121c^2d^4$; з) $216a^6x^9 - 125b^3y^9$.

410 Числа 257, 374 и 478 дают одинаковые остатки при делении на некоторое натуральное число, большее 1. Чему равно это натуральное число?

411 а) Пекарь за 2,5 часа выполнил $\frac{1}{12}$ часть полученного заказа. Сколько времени он должен после этого работать до того момента, когда ему останется сделать $\frac{1}{8}$ часть заказа, если он работает с постоянной производительностью?

б) Для того чтобы испечь 16 порций блинов, необходимо 4 яйца. Сколько потребуется яиц, чтобы приготовить 28 порций блинов?

412 Докажите, что $3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 8^3 + 9^3 + 10^3$ делится на 13.

413 Решите уравнение $ax + b = 0$, где:

$$a = 48\frac{3}{5} : 6\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12} + 1\frac{75}{94} \cdot \left(1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - 14 : 28\right); \quad b = \left(4\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3} + 5\frac{5}{6} - 6\frac{3}{5}\right) \cdot 15.$$

с **414*** Двенадцать школьников съели на празднике 44 пирожных. Каждый мальчик съел по 4 пирожных, а каждая девочка – по 3. Сколько пирожных на этом празднике съели девочки?

415* Четверо друзей, Миша, Ваня, Петя и Коля, съели вместе 55 конфет, при этом каждый из них съел хотя бы одну конфету. Миша съел больше всех конфет, а Ваня и Петя съели вместе 35 конфет. Сколько конфет съел Миша?



3. Решение линейных уравнений в целых числах*



Математика является отнюдь не только делом рассудка, но и существенным образом – делом фантазии.

Феликс Клейн (1849–1925),
немецкий математик

Нам часто приходилось сталкиваться с тем, что самые разные практические задачи приводили к уравнениям, в которых неизвестные по своему смыслу являлись целыми числами.

Уравнения, решениями которых являются целые числа, интересовали ученых еще в древности. Так, в III веке новой эры появляется сочинение «Арифметика» александрийского математика Диофанта, которое становится поворотным пунктом в развитии алгебры и теории чисел. И не только потому, что Диофант здесь впервые вводит буквенную символику – язык алгебры. В этой книге он предлагает новые способы решения задач, имеющих большое практическое значение.

В чем же особенности задач, рассмотренных Диофантом?

1. Математическими моделями его задач являются уравнения, имеющие целые коэффициенты, с двумя и более неизвестными.

2. В задачах требуется найти целые решения таких уравнений.

По имени Диофанта уравнения с целыми коэффициентами, которые требуется решить в целых числах, называли **диофантовыми уравнениями**.

Рассмотрим задачу, приводящую к таким уравнениям, и решим ее.

Задача 1.

Внук спросил у бабушки, сколько ей лет. Она ответила, что если сложить число ее полных лет и обе цифры этого числа, то получится 83. Сколько лет бабушке?

Решение:

Пусть x – количество десятков, а y – количество единиц числа полных лет бабушки. При этом, так как x и y – соответственно первая и вторая цифры ее возраста, то $x, y \in \mathbb{Z}$, $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$.

Теперь мы можем записать математическую модель нашей задачи:

$$\begin{cases} 10x + y + x + y = 83 \\ x, y \in \mathbb{Z}, 0 < x \leq 9, 0 \leq y \leq 9 \end{cases} \longrightarrow 10x + y = ?$$

Для решения полученного уравнения вначале упростим его:

$$10x + y + x + y = 83 \Leftrightarrow 11x + 2y = 83$$

Заметим, что $2y$ – число четное, а 83 – нечетное. Поскольку сумма двух четных чисел всегда число четное, то $11x$ должно быть нечетным, а значит, и число x – нечетное.

Так как $y \geq 0$, то из уравнения $11x + 2y = 83$ следует, что $11x \leq 83$. А поскольку $y \leq 9$, то

$$11x = 83 - 2y \geq 83 - 2 \cdot 9 \Leftrightarrow 11x \geq 65$$

Таким образом, $65 \leq 11x \leq 83$. Неравенство сохранится, если каждое из чисел 65 , $11x$ и 83 мы разделим на 11 , поэтому $5\frac{10}{11} \leq x \leq 7\frac{6}{11}$.

По условию x – целое число. Целыми решениями полученного неравенства являются $x = 6$ и $x = 7$. И так как мы выяснили, что число x – нечетное, то, значит, $x = 7$ является единственным решением исходного уравнения.

Теперь найдем соответствующее ему значение y . Для этого подставим значение $x = 7$ в уравнение $11x + 2y = 83$. Получаем:

$$11 \cdot 7 + 2y = 83 \Leftrightarrow 77 + 2y = 83 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$$

Найденное значение y удовлетворяет условиям, заданным в математической модели: $3 \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq 3 \leq 9$. Следовательно, решениями нашего уравнения являются $x = 7$, $y = 3$.

Ответ: бабушке 73 года.

Решая задачу 1, нам удалось не только найти некоторое ее решение, но и доказать, что данное решение единственное. Однако уравнения в целых числах часто имеют несколько решений. Иногда в этом случае задачу можно решить, осуществляя перебор всех возможных вариантов.

Задача 2.

Для перевозки зерна используются мешки, в которые входит либо 80 кг, либо 60 кг зерна. Сколько надо заготовить тех и других мешков для перевозки 1 тонны зерна таким образом, чтобы все мешки были полными?

Решение:

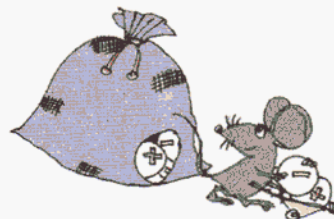
Пусть понадобится x мешков по 80 кг и y мешков по 60 кг. По условию задачи $x, y \in N_0$, где N_0 – множество неотрицательных целых чисел.

Запишем математическую модель нашей задачи:

$$\begin{cases} 80x + 60y = 1000 \\ x, y \in N_0 \end{cases} \longrightarrow x = ? \quad y = ?$$

Наибольшим общим делителем чисел 80 и 60 является число 20. Число 1000 делится на 20. Поэтому мы можем упростить уравнение, разделив на 20 обе его части:

$$80x + 60y = 1000 \Leftrightarrow 4x + 3y = 50.$$



Теперь заметим, что поскольку $y \geq 0$, то из равенства $4x + 3y = 50$ следует, что $4x \leq 50$. Разделив обе части данного неравенства на 4, получим $x \leq 12,5$. И так как по условию $x \in N_0$, то x может принимать лишь целые значения из промежутка $0 \leq x \leq 12$.

С другой стороны, равенство $4x + 3y = 50$ мы можем записать в следующем виде:

$$4x + 3y = 50 \Leftrightarrow 4x = 50 - 3y \Leftrightarrow 4x = 48 - 3y + 2 \Leftrightarrow 4x = 3(16 - y) + 2$$

Это означает, что $4x$ при делении на 3 дает остаток 2. Среди целых x от 0 до 12 таким свойством обладают лишь числа 2, 5, 8, 11. Значит, переменная x может принимать лишь следующие значения:

$$x = 2, x = 5, x = 8, x = 11.$$

Теперь из уравнения $4x + 3y = 50$ для указанных значений x найдем соответствующие им значения y .

$x = 2$	$x = 5$	$x = 8$	$x = 11$
$4 \cdot 2 + 3y = 50$	$4 \cdot 5 + 3y = 50$	$4 \cdot 8 + 3y = 50$	$4 \cdot 11 + 3y = 50$
$y = 14 \in N_0$	$y = 10 \in N_0$	$y = 6 \in N_0$	$y = 2 \in N_0$

Так как все полученные значения y являются неотрицательными целыми числами, то все найденные пары x и y являются решениями нашей задачи.

Ответ: мешки можно заготовить четырьмя различными способами:

Вид мешков	Количество мешков			
	1-й вариант	2-й вариант	3-й вариант	4-й вариант
Мешки по 80 кг	2	5	8	11
Мешки по 60 кг	14	10	6	2

Линейные уравнения с двумя переменными x и y , полученные при решении двух рассмотренных задач, в общем виде можно записать так:

$$ax + by = c, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Используемый нами алгоритм решения таких уравнений в общем виде можно записать следующим образом.

**Алгоритм решения уравнений вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$,
в целых числах методом перебора**

1. Найти области значений переменных.
2. Используя свойства делимости, найти все возможные значения одной из переменных.
3. Вычислить соответствующие значения второй переменной.
4. Выбрать из найденных решений уравнения те, которые удовлетворяют условиям задачи.

Однако далеко не всегда при поиске целых решений таких уравнений удастся выполнить второй шаг – отыскать все возможные значения какой-либо из переменных. Поэтому спектр задач, которые можно решить таким способом, весьма ограничен.

Александрийский математик Диофант еще в III веке нашей эры придумал и обосновал общий способ поиска целых решений данных уравнений. Способ Диофанта дает возможность после нахождения всего лишь одного произвольного решения исходного уравнения записать сразу все остальные его решения. А это, в свою очередь, позволяет существенно расширить возможности решения многих задач.



Прежде чем описать данный способ, рассмотрим две теоремы, которые позволяют сразу же определить, имеет ли целые корни уравнение вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, или не имеет. Например, имеет ли смысл искать целые корни следующих уравнений:

$$5x - 7y = -11, \quad 4x + 6y = 9,$$

или сразу можно сказать, что они не имеют целых решений?

Первую из этих теорем мы приведем без доказательства, так как для ее обоснования у нас пока недостаточно математических знаний, зато вторую – сможем доказать.

Теорема 1. Целое решение уравнения $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, всегда существует, если c делится на $d = \text{НОД}(|a|; |b|)$.

Коэффициенты уравнения $5x - 7y = -11$ удовлетворяют условию теоремы 1: действительно, $\text{НОД}(5; 7) = 1$, а число -11 , как и любое целое число, делится на 1. Значит, мы сразу можем сказать, что уравнение $5x - 7y = -11$ имеет хотя бы один целый корень.

Однако данная теорема не позволяет сделать никаких выводов о втором уравнении, ведь его коэффициенты не удовлетворяют условию этой теоремы: $\text{НОД}(4; 6) = 2$, а число 9 не делится на 2. В этом случае на помощь приходит теорема 2.

Теорема 2. Уравнение $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, не имеет целых решений, если c не делится на $d = \text{НОД}(|a|; |b|)$.

Доказательство:

Так как $d = \text{НОД}(|a|; |b|)$, то числа a и b можно представить в виде $a = d \cdot a_1$, $b = d \cdot b_1$, где $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ и при этом $\text{НОД}(|a_1|; |b_1|) = 1$. Подставим полученные выражения для a и b в исходное уравнение:

$$ax + by = c \Leftrightarrow d \cdot a_1 x + d \cdot b_1 y = c \Leftrightarrow d(a_1 x + b_1 y) = c$$

Левая часть полученного равенства делится на d , а правая – нет, так как по условию c не делится на d . Следовательно, не существует таких целых x и y , при которых это равенство было бы возможно, что и требовалось доказать. ▼

Теперь на основании теоремы 2, не решая уравнение $4x + 6y = 9$, мы можем утверждать, что оно не имеет целых решений.

Таким образом, мы научились по коэффициентам линейных уравнений с двумя неизвестными сразу выделять те из них, которые имеют хотя бы одно целое решение.

Идея поиска всех целых решений уравнений рассматриваемого вида заключается в следующем: сначала надо найти одно произвольное решение данного уравнения. После этого, используя свойства уравнения и найденное решение, можно будет выразить значения x и y через некоторую единую переменную величину (обозначаемую, например, k), принимающую целые значения. Подставляя затем вместо k в зависимости x и y от k все возможные целые значения k , получим все целые решения исходного уравнения.

Проиллюстрируем общий способ поиска целых решений уравнения вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, на примере уравнения $5x - 7y = -11$. Мы уже убедились в том, что оно имеет хотя бы одно решение. Попробуем его найти.

Перебирая различные варианты, убеждаемся в том, что одним из решений данного уравнения является пара чисел $x_0 = 2, y_0 = 3$. Действительно:

$$5 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = -11 \text{ (истинно).}$$

Теперь подставим в исходное уравнение вместо числа (-11) полученное выражение $5 \cdot 2 - 7 \cdot 3$ и выполним цепочку равносильных преобразований:

$$5x - 7y = 5 \cdot 2 - 7 \cdot 3 \Leftrightarrow 5x - 5 \cdot 2 = 7y - 7 \cdot 3 \Leftrightarrow 5(x - 2) = 7(y - 3).$$

Так как НОД $(5; 7) = 1$, то из полученного равенства следует, что для всех целых x и y , являющихся решением исходного уравнения, $(x - 2)$ кратно 7, а $(y - 3)$ кратно 5. Поэтому если мы разделим обе части последнего равенства на 35, то получим в левой и правой части некоторое целое число. Обозначим его k :

$$5(x - 2) = 7(y - 3) \Leftrightarrow \frac{x - 2}{7} = \frac{y - 3}{5} = k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Проведенные преобразования показывают, что выражения $\frac{x - 2}{7}$ и $\frac{y - 3}{5}$ равны одному и тому же целому числу k . А значит, приравняв к числу k каждое из выражений, мы сможем получить множество всех решений исходного уравнения:

$$\frac{x - 2}{7} = k \Leftrightarrow x = 7k + 2 \qquad \frac{y - 3}{5} = k \Leftrightarrow y = 5k + 3.$$

Итак, решениями исходного уравнения являются пары чисел вида $x = 7k + 2, y = 5k + 3$, где $k \in \mathbb{Z}$. Проверим, что эти пары чисел действительно являются решениями первоначального уравнения $5x - 7y = -11$:

$$5(7k + 2) - 7(5k + 3) = -11; \quad 35 + 10 - 35k - 21 = -11; \quad -11 = -11 \text{ (истинно).}$$

Например, при $k = 0$ решениями будут уже известные нам числа $x = 2, y = 3$; при $k = 10$ — числа $x = 72, y = 53$; при $k = -100$ — числа $x = -698, y = -497$ и т. д. Понятно, что простым перебором, который мы использовали при решении задач 1 и 2, множество решений данного линейного уравнения получить просто невозможно, так как каждому целому числу k будет соответствовать своя пара целых x и y , удовлетворяющих исходному уравнению.

Иногда по условию задачи на x и y накладываются некоторые ограничения. В этом случае полученные зависимости x и y от k будут решениями уже не при всех целых значениях k . Поэтому для полного решения задачи из ограничений на x и y надо получить ограничения на k и найти все возможные значения k . После этого для каждого найденного значения k надо найти соответствующие значения x и y .

Например, если в рассмотренном выше уравнении значения x и y должны принадлежать промежуткам $-10 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 20$, где $x, y \in \mathbb{Z}$, то k может принимать лишь целые значения, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$-10 \leq x \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq 7k + 2 \leq 10 \qquad 0 \leq y \leq 20 \Leftrightarrow 0 \leq 5k + 3 \leq 20$$

Уменьшим в первом неравенстве все его части на 2, а затем разделим их на 7. На основании известных свойств действий с числами неравенство сохранится. Аналогичные преобразования выполним со вторым неравенством:

$$-10 \leq 7k + 2 \leq 10 \Leftrightarrow -12 \leq 7k \leq 8 \Leftrightarrow -1\frac{5}{7} \leq k \leq 1\frac{1}{7} \Leftrightarrow k \in \{-1; 0; 1\}$$

$$0 \leq 5k + 3 \leq 20 \Leftrightarrow -3 \leq 5k \leq 17 \Leftrightarrow -\frac{3}{5} \leq k \leq 3\frac{2}{5} \Leftrightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

Поскольку k должно удовлетворять обоим условиям одновременно, то следует взять пересечение двух полученных множеств. Значит, $k \in \{0; 1\}$.

Теперь найдем значения x и y , соответствующие найденным значениям k .

Если $k = 0$, то $x = 7 \cdot 0 + 2 = 2$, $y = 5 \cdot 0 + 3 = 3$.

Если $k = 1$, то $x = 7 \cdot 1 + 2 = 9$, $y = 5 \cdot 1 + 3 = 8$.

Значит, уравнение $5x - 7y = -11$ при условии $-10 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 20$, где $x, y \in \mathbb{Z}$, имеет два решения:

$$x = 2, y = 3 \text{ и } x = 9, y = 8.$$

Обобщая рассмотренный способ поиска целых решений линейных уравнений вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм решений уравнения $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$

1. Найти $d = \text{НОД}(|a|; |b|)$.
2. Если c не делится на d , записать, что данное уравнение не имеет решений.
3. Если c делится на d , разделить правую и левую части исходного уравнения на d :

$$ax + by = c \Leftrightarrow a_1x + b_1y = c_1,$$

где $a_1 = a : d$; $b_1 = b : d$; $c_1 = c : d$. При этом $\text{НОД}(a_1; b_1) = 1$.

4. Используя свойства делимости целых чисел, найти одно из решений x_0, y_0 уравнения $a_1x + b_1y = c_1$.

5. Записать, что $a_1x + b_1y = a_1x_0 + b_1y_0$.

6. Записать полученное уравнение в виде $\frac{x - x_0}{-b_1} = \frac{y - y_0}{a_1} = k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

7. Выразить x и y через k : $x = -b_1k + x_0$; $y = a_1k + y_0$. И, подставив полученные выражения для x и y в исходное уравнение, сделать проверку.

8. Если на x и y наложены ограничения, то определить множество значений, которые может принимать k .

9. Если множество значений k конечно, то для каждого значения k найти соответствующие значения x и y .

10. Записать ответ.

К

416

1) Ваня загадал натуральное число и сообщил своим друзьям, что загаданное им число двузначное. Если сложить его с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 44. Могут ли Ванины друзья узнать, какое число он загадал?

2) Какой метод решения уравнений был использован при решении данной задачи? В каких случаях можно использовать этот метод?

417

Решите уравнения методом проб и ошибок:

1) $x(2x + 5) = 18$, где $x \in \mathbb{N}$;

2) $x(2x - 9,5) = 70$, где $x \in \mathbb{Q}$.

Чем данные уравнения похожи и чем отличаются? Можно ли решить данные уравнения методом перебора? Где и почему возникают затруднения?

418

1) Составьте математическую модель задачи:

«Катя задумала двузначное натуральное число, сумма которого с утроенной цифрой его единиц равна 74. Какое число задумала Катя?»

2) Проанализируйте полученное уравнение и докажите, что его можно решить методом перебора. Как сократить перебор, используя свойства делимости? Найдите ответ на поставленный в задаче вопрос.

3) Запишите в общем виде тип уравнения, которое вы решали. Запишите алгоритм его решения, используемый вами, и сравните его с алгоритмом, приведенным на стр. 90 учебника.

- 419** а) Задумали два натуральных числа. Известно, что сумма удвоенного первого числа и увеличенного в пять раз второго числа равна 49. Найдите загаданные числа.
б) Задумали два натуральных числа. Известно, что утроенное первое число равно разности между 58 и вторым числом, увеличенным в четыре раза. Найдите загаданные числа.
в) Сумма увеличенного в семь раз первого натурального числа и удвоенного второго натурального числа равна 39. Найдите эти числа.
г) Разность между 98 и увеличенным в девять раз первым натуральным числом равна увеличенному в пять раз второму натуральному числу. Найдите эти числа.
- 420** Можно ли набрать сумму 1000 р., если имеются купюры достоинством 10 р. и 100 р. и необходимо использовать ровно:
а) 10 купюр; б) 19 купюр; в) 27 купюр; г) 37 купюр?
- 421** На складе имеется кофе, упакованный в мешки по 20 кг и 40 кг. Отгрузка кофе происходит без вскрытия мешков.
а) Может ли кладовщик отгрузить клиенту 140 кг кофе?
б) Какие мешки с кофе должен отгрузить кладовщик и в каком количестве при отгрузке 260 кг, чтобы количество мешков с кофе было минимальным?
в) Какие мешки с кофе должен отгрузить кладовщик и в каком количестве при отгрузке 380 кг, чтобы количество мешков с кофе вместимостью 40 кг было минимальным?
- 422** У продавца на рынке есть только гири весом 100 г и консервные банки весом 450 г. Как продавцу с их помощью отвесить за одно взвешивание на чашечных весах 2,5 кг сахара, используя в общей сложности наименьшее количество гирек и банок, если он ставит их на одну чашу весов?
- 423** На станцию привезли 420 тонн угля в вагонах вместимостью 15 т и 20 т. Могло ли их быть в сумме:
а) 26; б) 20; в) 22; г) 29?
- 424** У бабушки есть стеклянные банки вместимостью 0,7 и 0,9 л. Бабушка разливает в банки сок, заполняя все банки полностью.
а) Сколькими способами она может разлить в эти банки 20,5 л сока и какие банки она должна при этом приготовить?
б) Какое количество и каких банок надо заготовить, чтобы разлить 15 л сока, чтобы при этом количество всех банок было минимальным?
в) Какое количество и каких банок надо заготовить, чтобы разлить 12 л сока, чтобы при этом количество банок по 0,9 л было минимальным?
- 425** а) Целое число дает при делении на 5 остаток 1, а при делении на 3 – остаток 2. Найдите остаток от деления этого числа на 15.
б) Найдите все числа, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 4 – остаток 3.
в) Целое число при делении на 7 дает остаток 2, а при делении на 8 – остаток 3. Найдите остаток от деления этого числа на 56.
г) Найдите все числа, которые при делении на 4 дают остаток 2, а при делении на 9 – остаток 5.

426 У вкладчика разорившейся фирмы было более 240 ее акций. Поняв, что акции уже ничего не стоят, он разорвал каждую из своих акций на 8 кусочков. Не удовлетворившись этим, он разорвал один из получившихся кусков опять на 8 кусков и рвал таким способом акции далее. Сколько акций у него должно было быть, чтобы на некотором этапе у него получилось 2010 кусков?

427 Мише и Маше сейчас вместе 26 лет, причем Маше в три раза меньше лет, чем будет Мише тогда, когда им вместе будет в пять раз больше лет, чем Юре сейчас. Сколько лет сейчас Юре, если ему меньше 14 лет?

428 Числа $m, n, \frac{89}{3m+7n}$ – натуральные. Найдите все пары чисел m и n , для которых это будет верно.



429 Используя диаграммы Эйлера–Венна, определите правильность логического вывода:

а) Если некоторые функции являются прямо пропорциональными зависимостями, то некоторые прямо пропорциональные зависимости – функции.

б) Если ни одна ломаная линия не является графиком линейной функции, то ни один график линейной функции – не ломаная линия.

в) Если все уравнения вида $kx + b = cx$ – линейные и некоторые линейные уравнения не имеют решений, значит, некоторые уравнения вида $kx + b = cx$ не имеют решений.

г) Если все решения уравнения $|x + 5| = 3$ отрицательные числа и некоторые отрицательные числа четные, то некоторые четные числа не являются решениями уравнения $|x + 5| = 3$.

д) Если ни одно решение уравнения $|x - 3| = 1$ не делится на 5, а некоторые числа, кратные 5, делятся на 10, значит, некоторые числа, кратные 10, не являются решениями уравнения $|x - 3| = 1$.

е) Если все натуральные числа являются целыми и ни одно натуральное число не является отрицательным, значит, все целые числа не являются отрицательными.

430 Докажите, что:

а) число $\underbrace{77\dots779}_{1234 \text{ цифры}}$ делится на 9;

б) число $\underbrace{44\dots44264}_{2010 \text{ цифр}}$ делится на 12.

431 В числе 3 985 16□ стерли последнюю цифру. Какой могла быть эта цифра, если число делилось на:

а) 2; б) 3; в) -4; г) 5; д) -6; е) 8; ж) 9; з) -10; и) -12; к) 18?

432 а) В магазине имеются велосипеды и мотоциклы. Известно, что разность между количеством велосипедов и 20% количества мотоциклов равна 40% от суммы количества мотоциклов и 50% количества велосипедов. Чего в магазине меньше – велосипедов или мотоциклов, и на сколько процентов?

б) Как изменится цена товара, если сначала ее увеличили на 20%, затем уменьшили на 10%, а затем уменьшили еще на 5%?

в) Один из множителей увеличили на 5%, а другой уменьшили на 5%. Как изменилось произведение?

г) Сторону квадрата изменили так, что его периметр сначала увеличился на 60%, а затем уменьшился на 60%. Как изменилась сторона квадрата?

433 Постройте график функции. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = -x + 5$; $a = -2$; $b = -8$; в) $f(x) = -2,5x + 7$; $a = 4$; $b = 3$;

б) $f(x) = 3x + 4$; $a = -4$; $b = 6$; г) $f(x) = 4,5x + 2$; $a = 2$; $b = -5$.

434 Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^{15} \cdot a^{36} \cdot a^{21} \cdot (a^4)^6 \cdot (3a)^8}{(3a^2)^7 \cdot (a^{56} : a^{28}) \cdot a^{34} \cdot a^{27}} - 3a^0$ при $a = 2$;

б) $\frac{7^{56} \cdot (c^{28} : c^3) \cdot b^{27} \cdot b^{63} \cdot (bc)^{68}}{c^9 \cdot b^{34} \cdot (b^{72} : b^{53}) \cdot (b^6)^9 \cdot b^{51} \cdot (7c)^{56} \cdot c^{27}} - 2(bc)^0$ при $b = -6$, $c = 2$.

435 Прямая проходит через точки A и B . Задайте аналитически линейную функцию, графиком которой является эта прямая, и постройте ее график:

а) $A(1; 4)$, $B(-2; -23)$; в) $A(4; 5)$, $B(-2; -7)$; д) $A(0; 1)$, $B(-1; -6)$;

б) $A(3; 26)$, $B(-4; -16)$; г) $A(1; -16)$, $B(-4; 9)$; е) $A(3; 4)$, $B(-2; 9)$.

436 Докажите, что $5^{16} - 2^{16}$ делится на 21.

Д

437 Можно ли набрать сумму 5000 р., если имеются купюры достоинством 100 р. и 500 р. и необходимо использовать ровно:

а) 14 купюр; б) 9 купюр; в) 26 купюр; г) 35 купюр?

438 На складе имеется мука, упакованная в мешки по 30 кг и 60 кг. Отгрузка производится без вскрытия мешков.

а) Может ли кладовщик отгрузить клиенту 210 кг муки?

б) Какие мешки с мукой и в каком количестве при отгрузке 270 кг должен отгрузить кладовщик, чтобы количество мешков с мукой было минимальным?

в) Какие мешки с мукой и в каком количестве при отгрузке 390 кг должен отгрузить кладовщик, чтобы количество мешков с мукой вместимостью 60 кг было минимальным?

439 У продавца на рынке есть только гири весом 200 г и 500 г. Как продавцу с их помощью отвесить на чашечных весах за одно взвешивание 4 кг конфет, используя ровно 14 гирек, если он ставит их на одну чашу весов?

440 Папа привез на дачу стеклянные банки емкостью 0,5 и 0,7 л. Мама раскладывает в эти банки варенье так, чтобы все они были полными.

а) Сможет ли мама разложить в эти банки 12 л варенья?

б) Какое количество и каких банок должен был привезти папа, чтобы мама могла разложить в них 25 л варенья так, чтобы количество всех банок было равно 44?

в) Какое количество и каких банок должен был привезти папа, чтобы мама могла разложить в них 17 л варенья так, чтобы при этом количество банок было равно 30?

441 На станцию привезли 650 тонн нефти в цистернах вместимостью 20 т и 25 т. Могло ли их быть в сумме:

а) 25; б) 29; в) 32; г) 35?

442 а) Целое число дает при делении на 8 остаток 3, а при делении на 5 – остаток 1. Найдите остаток от деления этого числа на 40.

б) Найдите все числа, которые при делении на 9 дают остаток 2, а при делении на 7 – остаток 4.

443 Числа $k, p, \frac{19}{3k+5p}$ – натуральные. Найдите все пары чисел k и p , для которых это будет верно.

444 Докажите, что:

а) число $\underbrace{22\dots226}_{2344 \text{ цифры}}$ делится на 3;

б) число $\underbrace{55\dots554}_{1991 \text{ цифра}}$ делится на 18.

445 В числе 7 654 32□ стерли последнюю цифру. Какой могла быть эта цифра, если число делилось на:

а) 2; б) 3; в) -4; г) 5; д) -6; е) 8; ж) 9; з) -10; и) -12; к) 18?

446 а) Сторону квадрата сначала уменьшили на 40%, а затем увеличили на 40%. Как и на сколько процентов изменилась его площадь?

б) В коллекции имеются марки и значки. Известно, что разность между количеством значков и 40% количества марок равна 60% от суммы количества марок и 20% количества значков. Чего меньше в коллекции, значков или марок, и на сколько процентов?

в) Как изменится цена товара, если сначала ее уменьшили на 60%, затем увеличили на 20%, а затем увеличили еще на 50%?

г) Один из множителей уменьшили на 10%, а другой уменьшили на 30%. Как изменилось произведение?

447 Постройте график функции. Найдите: 1) значение y при x , равном a ; 2) значение x при y , равном b , если:

а) $f(x) = 2x - 9$; $a = -3$; $b = -6$;

б) $f(x) = -5x + 3$; $a = 2$; $b = 4$.

448 Найдите значения выражений:

а) $\frac{a^7 \cdot a^{16} \cdot a^{32} \cdot (a^2)^8 \cdot (5a)^6}{(5a^3)^5 \cdot (a^{34} : a^{21}) \cdot a^{19} \cdot a^{29}} - a^0$ при $a = -4$;

б) $\frac{11^{43} \cdot (c^{32} : c^{26}) \cdot b^{31} \cdot b^{29} \cdot (bc)^{52}}{c^8 \cdot b^{37} \cdot (b^{53} : b^{29}) \cdot (b^3)^8 \cdot b^{27} \cdot (11c)^{43} \cdot c^6} + 6(bc)^0$ при $b = 7$, $c = -1$.

449 Прямая проходит через точки A и B . Задайте аналитически линейную функцию, графиком которой является эта прямая, и постройте ее график:

а) $A(1; 5)$, $B(-1; 3)$;

б) $A(0; 4)$, $B(-2; 0)$;

в) $A(2; 4)$, $B(-1; -8)$.

450 Докажите, что любой предмет, вес которого выражается целым числом килограммов, большим 7, можно взвесить на чашечных весах, имея лишь 3-килограммовые и 5-килограммовые гири в достаточном количестве.

451 Решите уравнение $|ax + 5| = b$, где:

$a = \left(\frac{1}{2,5 - 1} - \frac{1}{3\frac{1}{2} - 1} \right) : \frac{4}{15}$; $b = \left(2\frac{7}{12} + 2\frac{19}{42} \right) \cdot 3 - 64,5 : 6 + 4\frac{2}{7} \cdot 2,1 + 1,3 \cdot 4\frac{1}{6} - \frac{65}{84}$.

452 Докажите, что $9^{32} - 4^{32}$ делится на 65.

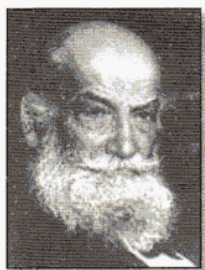


453* В ассортименте магазина имеется 40 подарочных наборов 6 различных наименований. Сможет ли покупатель купить в этом магазине 7 одинаковых подарочных наборов?

454* Наташе 12 лет, а ее бабушке 60 лет. Через сколько лет бабушка станет в 4 раза старше Наташи?

§ 2. Линейные неравенства

1. Линейные неравенства и их решение



*В математике есть своя красота,
как в живописи и поэзии.*

Николай Егорович Жуковский (1847–1921),
русский ученый, создатель аэродинамики

Между двумя числами или алгебраическими выражениями могут стоять знаки $>$, $<$, $\geq$ или $\leq$. Получившиеся таким образом математические предложения называют *неравенствами*. При этом если между выражениями стоят знаки $>$ или $<$, то неравенства называют *строгими*, а если в них используются знаки $\geq$ или $\leq$, то неравенства называют *нестрогими*.

Неравенства могут быть всегда истинными или всегда ложными. Примерами таких неравенств являются верные и неверные числовые неравенства, а также неравенства, верные или неверные для любых значений входящих в них букв:

$5 > 4$ (истинно); $|3a - 2b| < 0$ (ложно); $(a + b)^2 \geq 0$ (истинно).

Но есть неравенства, которые при одних значениях переменных истинны, а при других ложны. И тогда появляется необходимость найти те значения переменных, при подстановке которых неравенство превращается в истинное высказывание. Такие значения переменных называют *решениями неравенства*.

Значит, *решить неравенство* – это найти множество всех его решений либо доказать, что решений нет.

Ранее мы уже решали простейшие неравенства с помощью числовой прямой. И знаем, что решениями неравенств четырех простейших видов $x > a$, $x < b$, $x \geq c$ и $x \leq d$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, являются следующие числовые промежутки:

Неравенство	$x > a$	$x < b$	$x \geq c$	$x \leq d$
Решение неравенства	Открытый луч $(a; +\infty)$ 	Открытый луч $(-\infty; b)$ 	Замкнутый луч $[c; +\infty)$ 	Замкнутый луч $(-\infty; d]$

А можно ли найти способы решения более сложных неравенств, аналогичные способам, используемым нами при решении уравнений? То есть можно ли с помощью *равносильных преобразований* привести исходное неравенство к одному из четырех указанных выше простейших видов? Ведь тем самым мы укажем все значения переменной, при которых неравенство истинно. А это и будет означать, что мы решили исходное неравенство.



Прежде чем ответить на этот вопрос, уточним, что имеют в виду, когда говорят о равносильных преобразованиях неравенств.

Определение 1. Два неравенства **равносильны**, если все решения первого неравенства являются решениями второго неравенства и, наоборот, все решения второго неравенства являются решениями первого.

Например, неравенства $x + 3 > -1$ и $x + 5 > 1$ равносильны, так как оба будут верными в том и только в том случае, если $x > -4$. А неравенства $x + 3 > -2$ и $x + 5 > 1$ не являются равносильными, так как, например, при $x = -4$ первое неравенство верно, а второе – нет.

Определение 2. Преобразование неравенства называют **равносильным**, если оно приводит к неравенству, равносильному данному.

Правила равносильных преобразований неравенств основываются на известных нам свойствах чисел:

$$\begin{aligned} \forall a, b, c \in \mathbb{Q}: \quad a > b &\Rightarrow a + c > b + c & a > b, c > 0 &\Rightarrow ac > bc \text{ и } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \\ a > b &\Rightarrow a - c > b - c & a > b, c < 0 &\Rightarrow ac < bc \text{ и } \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{aligned}$$

То есть если число a больше числа b , то при сложении и вычитании этих чисел с некоторым числом c , а также при умножении и делении их на положительное число c знак неравенства не изменится. Если же данные числа a и b умножить или разделить на отрицательное число c , знак неравенства изменится на противоположный.

Данные свойства неравенств верны и для всех других видов неравенств, строгих и нестрогих. И из них непосредственно следуют *правила равносильных преобразований неравенств*.

Правила равносильных преобразований неравенств

1. Если к обеим частям неравенства прибавить или вычесть одно и то же число (выражение), то получим неравенство, равносильное данному.
2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число (выражение), то получим неравенство, равносильное данному.
3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число (выражение) и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Заметим, что первое свойство равносильных преобразований неравенств полностью совпадает с аналогичным свойством равносильных преобразований уравнений. Поэтому правило переноса слагаемых из одной части уравнения в другую можно распространить и на неравенства.

Правило переноса слагаемых из одной части неравенства в другую

Слагаемые можно переносить из одной части неравенства в другую, меняя при этом их знаки на противоположные.

Рассмотрим теперь неравенства:

$$-2x + 1 < 0; \quad 0,4x - 9 \geq 0; \quad -x > 0; \quad 5x + 2 \leq 0$$

Общее во всех этих неравенствах то, что левая их часть является выражением вида $kx + b$, где k, b – рациональные числа. При этом в каждом из этих неравенств левая часть сравнивается с 0 с помощью знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Такие неравенства называют *линейными неравенствами с одним неизвестным x* .

Определение 3. *Линейным неравенством с одним неизвестным x называется неравенство, которое может быть представлено в одном из четырех видов:*

$$kx + b > 0, \quad kx + b < 0, \quad kx + b \geq 0, \quad kx + b \leq 0,$$

где k, b – рациональные числа.

Решим линейное неравенство в общем виде, рассмотрев для определенности неравенство $kx + b > 0$.

Вначале перенесем слагаемое b в правую часть данного неравенства:

$$kx + b > 0 \Leftrightarrow kx > -b$$

Для простоты рассуждений обозначим $c = -b$. Тем самым мы переходим к решению неравенства $kx > c$. Это решение будет зависеть от значений k и c . При этом возможны три случая: $k = 0$, $k > 0$ и $k < 0$.

1) Если $k = 0$, то неравенство $kx > c$ преобразуется в неравенство $0 \cdot x > c$. Тогда при неотрицательных значениях c данное неравенство не будет иметь решений, а при отрицательных – его решением будет любое число.

2) Если $k > 0$, то обе части неравенства мы можем разделить на k , сохранив знак неравенства. Получаем:

$$kx > c \Leftrightarrow x > \frac{c}{k}.$$

Значит, решениями неравенства будут все значения x из интервала $(\frac{c}{k}; +\infty)$.

3) Если $k < 0$, то обе части неравенства мы можем разделить на k , изменив знак неравенства на противоположный. Получаем:

$$kx > c \Leftrightarrow x < \frac{c}{k}.$$

Следовательно, решениями неравенства будут все значения x из интервала $(-\infty; \frac{c}{k})$.

Таким образом, как только мы представили линейное неравенство с одним неизвестным x в виде $kx > c$, мы сразу можем найти его решение.

В случае, если неравенство $kx \geq c$ нестрогое, то при $k \neq 0$ число $\frac{c}{k}$ также будет являться его решением. Поэтому в ответе получится не открытый, а замкнутый числовой луч $[\frac{c}{k}; +\infty)$ или $(-\infty; \frac{c}{k}]$. Если же $k = 0$, то неравенство $0 \cdot x \geq c$ будет истинно при любом $c \leq 0$ и ложно при $c > 0$.

Таким образом, все полученные результаты решения неравенств $kx > c$ и $kx \geq c$ в зависимости от значений k и c представим в следующей таблице:

Значение k	Значение c	Решения неравенства $kx > c$	Решения неравенства $kx \geq c$
$k = 0$	$c < 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c = 0$	$\emptyset$ (Нет решений)	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c > 0$	$\emptyset$ (Нет решений)	$\emptyset$ (Нет решений)
$k > 0$	c – любое	$(\frac{c}{k}; +\infty)$	$[\frac{c}{k}; +\infty)$
$k < 0$	c – любое	$(-\infty; \frac{c}{k})$	$(-\infty; \frac{c}{k}]$

Аналогично рассуждая, можно получить следующую таблицу решений неравенств $kx < c$ и $kx \leq c$:

Значение k	Значение c	Решения неравенства $kx < c$	Решения неравенства $kx \leq c$
$k = 0$	$c < 0$	$\emptyset$ (Нет решений)	$\emptyset$ (Нет решений)
$k = 0$	$c = 0$	$\emptyset$ (Нет решений)	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c > 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$k > 0$	c – любое	$(-\infty; \frac{c}{k})$	$(-\infty; \frac{c}{k}]$
$k < 0$	c – любое	$(\frac{c}{k}; +\infty)$	$[\frac{c}{k}; +\infty)$

В итоге мы получили все решения неравенств вида

$$kx > c, \quad kx < c, \quad kx \geq c, \quad kx \leq c,$$

где k, c – рациональные числа.

Таким образом, задача решения линейных неравенств преобразовалась в задачу приведения их с помощью равносильных преобразований к одному из четырех указанных видов.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите неравенство $2x - 4 < 5x + 8$.

Решение:

Приведем данное неравенство к виду $kx < c$, где $k, c \in \mathbb{Q}$. Для этого слагаемые с переменной x соберем в левой части неравенства, а числа – в правой и упростим полученные выражения:

$$2x - 4 < 5x + 8 \Leftrightarrow 2x - 5x < 4 + 8 \Leftrightarrow -3x < 12$$

Здесь $k = -3$, а $c = 12$. Разделим обе части полученного неравенства на отрицательное число (-3) , изменив при этом знак неравенства на противоположный:

$$-3x < 12 \Leftrightarrow x > -4$$

Значит, решением нашего неравенства является открытый луч $(-4; +\infty)$.

Ответ: $(-4; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $3(x + 4) - 2(x - 8) > x - 5$.

Решение:

Приведем данное неравенство к виду $kx > c$, где $k, c \in \mathbb{Q}$. При этом результаты равносильных преобразований будем записывать друг под другом:

$$\begin{aligned} 3(x - 4) - 2(x - 8) &> x - 5 \\ 3x - 12 - 2x + 16 &> x - 5 \\ 3x - 2x - x &> -5 + 12 - 16 \\ 0 \cdot x &> -9 \end{aligned}$$



Здесь $k = 0$, а $c = -9$. Неравенство $0 \cdot x > -9$ верно при любом значении x . Значит, решением исходного неравенства является вся числовая прямая.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $\frac{2x - 1}{2} \leq \frac{6 - 2x}{3}$.

Решение:

Приведем данное неравенство к виду $kx \leq c$, где $k, c \in \mathbb{Q}$, используя правила равносильных преобразований:

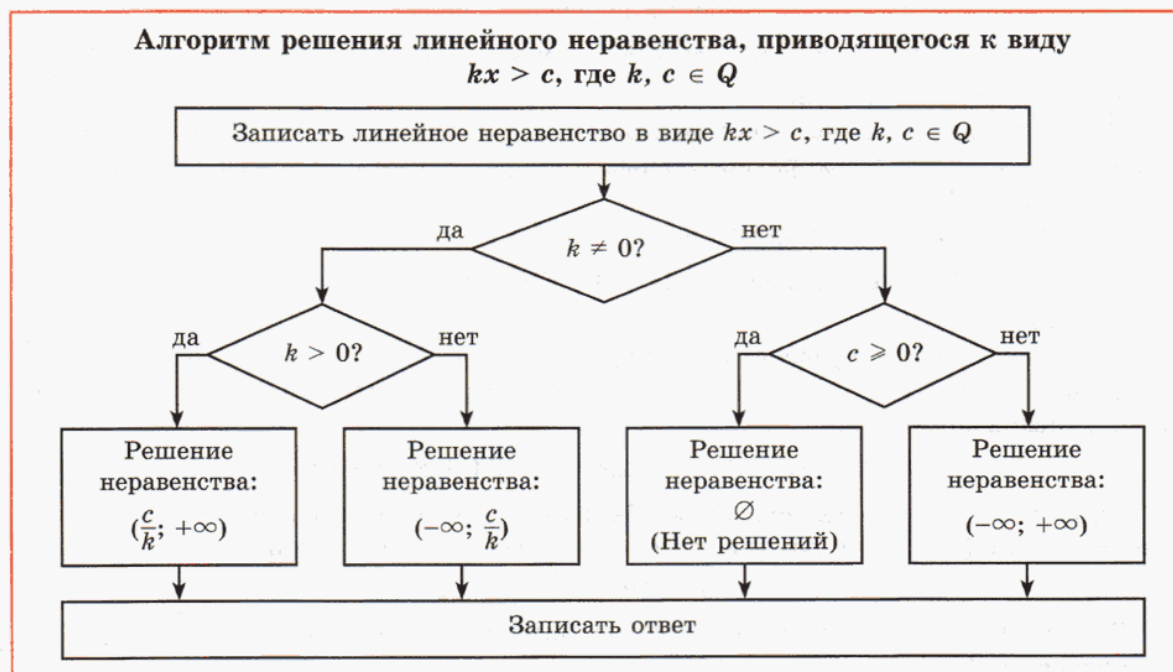
$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{2} \leq \frac{6 - 2x}{3} &\Leftrightarrow 3(2x - 1) \leq 2(6 - 2x) \Leftrightarrow 6x - 3 \leq 12 - 4x \Leftrightarrow 10x \leq 15 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \leq 1,5. \end{aligned}$$

Значит, решением исходного неравенства является замкнутый луч $(-\infty; 1,5]$.

Ответ: $(-\infty; 1,5]$.

Установленные способы решения линейных неравенств для каждого из четырех выделенных в определении случаев можно представить в виде алгоритма.

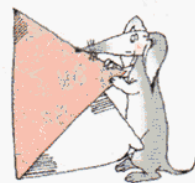
Рассмотрим пример такого алгоритма для линейного неравенства, приводящегося к виду $kx > c$, где $k, c \in \mathbb{Q}$.



К

455 Запишите в виде неравенств следующие высказывания:

- а) сумма чисел 2 и 6 больше 5;
 б) разность квадратов чисел a и b меньше 8;
 в) квадрат суммы чисел c и d больше или равен 25;
 г) разность кубов чисел x и y меньше или равна 32.

**456** Найдите верные высказывания:

- а) $a > a$; в) $a > b \Leftrightarrow b < a$; д) $a > b \Leftrightarrow b \leq a$; ж) $a > b, b > c \Rightarrow a > c$;
 б) $a \geq a$; г) $a > b \Leftrightarrow b > a$; е) $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$; з) $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

457 Известно, что $a > b, c \leq b$. Используя свойства неравенств, запишите еще четыре различных неравенства.**458** На числовой прямой Ox изобразите указанные промежутки и запишите их обозначения:

- а) $x < 4$; в) $x \geq 3$; д) $-5 \leq x \leq -2$; ж) $-9 \leq x < -6$;
 б) $x > -5$; г) $x \leq -2$; е) $3 < x < 7$; з) $-2 < x \leq 6$.

459 Изменится ли знак неравенства $2 < 5$, если в левой и правой его частях выполнить следующие преобразования:

- а) прибавить число (-1) ; в) умножить на число 3;
 б) вычесть число 4; г) разделить на число (-2) ?

Запишите полученное неравенство и проверьте свои предположения с помощью вычислений.

460 1) Найдите множества решений неравенств:

$$x \geq 2; \quad x + 3 \geq 5; \quad x - 2 \geq 0; \quad 7x \geq 14; \quad -2x \leq -4; \quad x : 2 \geq 1; \quad -\frac{x}{3} \leq -\frac{2}{3}.$$

Что вы замечаете? Являются ли данные неравенства равносильными?

2) Предложите свои варианты определения понятий «равносильные неравенства» и «равносильное преобразование неравенства». Сравните свои определения с определениями, приведенными на стр. 99 учебника.

3) Проанализируйте преобразования, выполненные вами при решении данных неравенств, и сформулируйте правила равносильных преобразований неравенств. Сравните их с правилами преобразований, приведенными на стр. 99–100 учебника.

461 Равносильны ли неравенства:

- а) $x - 1 < 3$ и $x < 4$; д) $5a < 20$ и $-a > -4$;
 б) $y + 1 > 6$ и $y > 7$; е) $2 - 6b < 5$ и $6b - 2 \leq -5$;
 в) $z < 8$ и $-z > -8$; ж) $8c - 6 > 10$ и $4c > 8$;
 г) $t > 0$ и $4t > 0$; з) $-5d + 7 < -8$ и $-3d < -3$?

**462** Используя правила равносильных преобразований, докажите, что все приведенные ниже неравенства равносильны между собой:

$$x^2 - 5 > x^2 - 2x + 3; \quad -5 > -2x + 3; \quad -2x + 3 < -5; \quad -2x < -8; \quad x > 4.$$

463 Составьте по три неравенства, множеством решений которых служит числовой промежуток:

- а) $(4; +\infty)$; б) $[-2; +\infty)$; в) $(-\infty; -5)$; г) $(-\infty; 6]$.

464 Решите неравенство, пользуясь правилами равносильных преобразований:

- а) $7x < -28$; ж) $4a - 2 > -10$; н) $-3n + 5 > -10n - 9$;
 б) $3y > 36$; з) $10b + 7 < 8$; о) $6p - 2 \leq 8p + 11$;
 в) $-5z \leq -45$; и) $6 \leq 4 - 3c$; п) $11q + 7 \geq 9q + 13$;
 г) $-9p > 63$; к) $12 \geq 5d - 9$; р) $-7r - 9 > 6r + 17$;
 д) $-\frac{5}{6} < -3q$; л) $-12k + 4 > -5$; с) $8s + 7 < -12s - 33$;
 е) $\frac{4}{3}r \geq -32$; м) $7 - 5m \leq -16$; т) $-12t - 4 \leq -9t + 26$.

465 1) Является ли число 1,5 решением неравенства $4x + 3 > 9$? Найдите два решения этого неравенства, большие 1,5. Существуют ли решения этого неравенства, меньшие 1,5?

2) Является ли число -6 решением неравенства $3x - 6 \leq -24$? Найдите два решения этого неравенства, меньшие -6. Существуют ли решения этого неравенства, большие -6?

466 Известно, что $a > 7$. Докажите, что:

- а) $-6a < -42$; в) $3a - 2 > 19$; д) $9 - 4a < 5a - 54$;
 б) $\frac{a}{2} > 3,5$; г) $3 - \frac{a}{4} < \frac{5}{4}$; е) $\frac{3a}{7} - 3 > 11 - \frac{11a}{7}$.

Какие правила равносильных преобразований неравенств вы использовали при доказательстве каждого из утверждений?

467 Решите неравенство $9x + 5 \geq 6x - 11$. Является ли решением этого неравенства число:

- а) -7; б) -6; в) -5; г) $-5\frac{1}{3}$; д) 0; е) 5; ж) $5\frac{1}{3}$?

468 Решите неравенство:

- а) $0 \cdot x > 5$; в) $0 \cdot z \geq -3$; д) $0 \cdot p < -9$; ж) $0 \cdot r \leq 6$;
 б) $0 \cdot y > -7$; г) $0 \cdot t \geq 8$; е) $0 \cdot q < 11$; з) $0 \cdot s \leq -15$.

469 1) По аналогии с определением линейного уравнения с одним неизвестным, дайте определение линейного неравенства с одним неизвестным. Сравните его с определением, приведенным на стр. 100 учебника.

2) Решите в общем виде линейное неравенство:

- а) $kx > c$; б) $kx \geq c$; в) $kx < c$; г) $kx \leq c$.

Представьте полученные результаты в таблице в зависимости от значений k и c .

Значение k	Значение c	Решения неравенства			
		$kx > c$	$kx \geq c$	$kx < c$	$kx \leq c$
$k = 0$	$c < 0$				
$k = 0$	$c = 0$				
$k = 0$	$c > 0$				
$k > 0$	c — любое				
$k < 0$	c — любое				

Сравните свою таблицу с таблицами, приведенными на стр. 101 учебника.

470 Решите неравенство и изобразите множество его решений на числовой прямой Ox :

- а) $8x - 3,6 < 4,4$; в) $3x + 16 \geq -5$; д) $7x + 12 \geq 9x - 14$;
 б) $9 - 4x > -7$; г) $-5x - 14 \leq -19$; е) $6 - 8x < -12 - 11x$.

471 Предложите свой алгоритм решения произвольного линейного неравенства с одним неизвестным. Сравните его с алгоритмом, предложенным в учебнике на стр. 102.

472 При каких значениях переменной истинно неравенство?

- а) $8x + 23 - 2x > 10 - 6x - 17$; ж) $4x - (32 + 6x - 16) + 3x \leq -10$;
 б) $15x + 3 - 17x \leq 7 - 5x - 19$; з) $9x - 37 - (4x - 25) > 11$;
 в) $30 > 3x - x + 8x + 7x - 2x$; и) $7x - (6 - 5x) \geq 4 - (3x - 2) - x$;
 г) $5x + 8 \leq 6x + 12 + 3x + 2$; к) $12x - (9 + 8x) \leq 5 + (4x + 2)$;
 д) $4x + 18 + 7x < 17 + 11x - 8 + 10$; л) $11x + (12 - 3x) < 14x + 13 - (6x + 4)$;
 е) $16 - 9x - 23 + 7x \leq 22 - 2x - 34$; м) $7 - (4x + 9) + 5x < (15 - 3x) + (x + 7)$.

473 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $3a - 7$ больше 11;
 б) значение выражения $12 - 2b$ меньше 8;
 в) значение выражения $9c - 5$ больше или равно значению выражения $6c + 4$;
 г) сумма значений выражений $4d + 3$ и $2 - 9d$ не больше 2;
 д) разность значений выражений $2x + 4$ и $x + 3$ меньше 15;
 е) значение выражения $11z - 4$ больше утроенного значения выражения $2z + 3$;
 ж) удвоенное значение выражения $7 - y$ не меньше значения выражения $5y + 3$;
 з) удвоенное значение выражения $3t - 5$ меньше или равно утроенному значению выражения $5 - 6t$?

474 Решите неравенство:

- а) $2x - 3(5 - x) > 3$; ж) $2,5a - 4(2a + 1,5) + 0,35 > 4,6(a + 1) - 6a$;
 б) $4(6y - 1) < 19 + 3(8y - 9)$; з) $2,2(2b - 1) - 1,6 \geq 3,1(3 + b) + 4,3(b + 2) - 2,7$;
 в) $7(3 + 5z) + 6 \geq 2(3z - 7) - 17$; и) $1,2(c - 4) - 0,5 < 0,2(2c - 27) - 0,6c + 1,4c$;
 г) $8s - 2(2 - 7s) > 5(4s + 3) + 3s$; к) $5,7d + 8(0,9 - 0,1d) > 3 - 1,3(6 - 3d)$;
 д) $-6(3t - 7) + 13t < 5(9 - 3t) + 10t$; л) $7,3p - 7(0,6p - 1) + 1,3 \leq -10,5 - 11,9(p - 2)$;
 е) $5r - 3(4r - 2) + 7r > -4(2 - 3r)$; м) $-(2,5r + 1) - 3(2,3r - 2) \leq -2(4,7r - 1,2)$.

475 Докажите, что данное неравенство не имеет решений:

- а) $5(x + 1) + 6(x + 2) > 11(x + 2)$; в) $7(3z + 6) + 5(z - 3) - 13(2z + 3) \geq 0$;
 б) $6(y - 1) + 3(8 - y) \leq 3(y + 2)$; г) $4(5t + 2) - 2(5t + 2) - 10(t - 4) < 0$.

476 Докажите, что неравенство верно при всех значениях переменной:

- а) $5(x + 1) - x + 10 > 2 - 4(x - 3) + 8x$; г) $3 - 4(a - 2) - 5a + 4 \geq 5 - 3(a - 3) - 6a$;
 б) $12 - 6(y + 2) + 5y + 9 < 6y - 7(y - 3)$; д) $-2(b + 8) + 6b + 8 \leq 3 - 7b - 9 + 11b$;
 в) $7z + 5 - 4(z + 5) \leq -1 - 2(z - 7) + 5z$; е) $9c - 6 + 3c + 7 > 2(5 - 6c) - 15 + 24c$.

477 При каких значениях переменной значение выражения:

- а) $9x - 45$ положительно; д) $3(c - 4) - (-5c + 4)$ отрицательно;
 б) $5y + 38$ отрицательно; е) $4(8 - m) + 3(6 - 2m)$ неотрицательно;
 в) $5 - 4a$ неположительно; ж) $-5(3n - 1) - 7(3 - n)$ неположительно;
 г) $7b + 28$ неотрицательно; з) $2(-2p + 3) - 5(4 - p) + 6p$ положительно?

478 Укажите, если это возможно:

- а) наибольшее решение неравенства $2x - 7 + 9x \leq 4x - 5 + 3x$;
 б) наименьшее решение неравенства $5 - 9y + 6 + 15y > 4y - 12 - 2y$;
 в) наибольшее решение неравенства $3 + 4z - 11 + 6z < 2z - 9 + z$;
 г) наименьшее решение неравенства $5t - 3t + 7 + 13t \geq 8t - 16 - 7t + 6t$;
 д) наибольшее целое решение неравенства $18 - 3p + 9 - 19p > 8p - 7 - 9p$;
 е) наименьшее целое решение неравенства $9 - 2q - 12 + 17q > 9q - 11 + 3q$.

479 Докажите, что:

- а) неравенство $6x > 6(x + 3)$ не имеет корней;
 б) решением неравенства $11y - 5 < 9(y + 1) + 2y$ является любое число;
 в) число $\frac{1}{3}$ является решением неравенства $2z - 5(2 - z) \leq 2(4z - 3) - 5z$;
 г) число (-1) является решением неравенства $4(3t + 1) - 7t > 15 - 9(t + 3)$;
 д) число 6 не является решением неравенства $4a - 7(3 - a) - 6 \geq 3a - 2(7 - 3a)$;
 е) число (-5) не является решением неравенства $16 - 3(b + 2) + 6b < 11b + 5(1 - b)$.

480 Решите неравенство:

- а) $\frac{x}{7} + 4 > 3$; д) $\frac{r}{2} + 2 < \frac{r}{3} - 6$; и) $\frac{3x - 2}{2} > \frac{6x + 1}{3}$; н) $\frac{x + 2}{7} - 1 \leq \frac{2x + 1}{6}$;
 б) $\frac{y}{4} - 5 < 9$; е) $4 - \frac{s}{4} \geq \frac{s}{5} + 7$; к) $\frac{2 - 8y}{5} < \frac{9 + y}{4}$; о) $\frac{y - 2}{6} + 1 > \frac{y + 1}{5}$;
 в) $-\frac{z}{2} + 3 \leq 5$; ж) $\frac{p}{6} - 3 \leq -\frac{p}{9} + 4$; л) $\frac{5 - z}{-2} \leq \frac{8 - 3z}{5}$; п) $1 - \frac{z - 3}{7} < \frac{2 + z}{4}$;
 г) $6 - \frac{t}{3} \geq -4$; з) $3 - \frac{q}{4} > -\frac{q}{7} - 2$; м) $\frac{4t + 7}{-4} \geq \frac{10 + t}{-9}$; р) $\frac{3 - 7t}{-8} \leq 1 - \frac{7 - 3t}{-5}$.

481 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $\frac{2x - 5}{2}$ меньше значения выражения $\frac{7 + 3x}{3}$;
 б) значение выражения $\frac{3 + 4y}{6}$ меньше или равно значению выражения $\frac{11 - 2y}{4}$;
 в) значение выражения $\frac{9x - 11}{8} + 3$ больше или равно значению выражения $5 - \frac{4 - 7x}{5}$;
 г) значение выражения $2 + \frac{2 - 3t}{7}$ больше значения выражения $\frac{6t + 5}{2} + 3$?

482 Запишите три неравенства, решением которых является число c :

- а) $c = 4$; б) $c = -5$; в) $c = 2,3$; г) $c = -3,5$.

483 Запишите три неравенства, равносильных неравенству $4x - 3 < 2y + 1$.

484 Известно, что $5a + 4 \geq 16b - 11$. Докажите, что:

- а) $a \geq 3,2b - 3$; в) $-1,6b \geq -\frac{a}{2} - 1,5$; д) $\frac{a}{3} - 1 \geq \frac{16b}{15} - 2$;
 б) $7,5a + 22,5 \geq 24b$; г) $-a + 1,4 \leq 4,4 - 3,2b$; е) $\frac{15a}{7} + \frac{3 - 6b}{7} \geq 6b - 6$.

485 Найдите все значения a , при которых неравенство $2a + 5x < 7x - 6$ истинно при:

- а) $x = 3$; б) $x = -1$; в) $x = 0$; г) $x = 8$.

486 Имеет ли неравенство решения при указанном значении a ?

- а) $5x - a > 2(3x - 2)$, $a = 5$; г) $5(t + 3) - 3a \leq 5t + 2$, $a = -7$;
 б) $2y + 3a < 2y + 7$, $a = -3$; д) $9r - a > 7(r - 4) + 2r$, $a = -4$;
 в) $4(z - 7) < 4z + 3a$, $a = -10$; е) $8(s - 7) - 4s \geq 4s + 7a$, $a = 6$.

487 Решите неравенство:

- а) $4(x + 5) > 28(x - 9)$; г) $-14(3t + 12) \leq 49(6 - 7t)$;
 б) $8(y - 5) < 24(7 - y)$; д) $-18(6a - 15) \geq -63(7 - 3a)$;
 в) $6(48 - 2z) > -48(3 - z)$; е) $15(21 - 4b) < 60(11 - 5b)$.

488 а) Длина одной стороны прямоугольника на 8 см больше длины другой. Какой может быть длина большей стороны, если периметр этого прямоугольника меньше 32 см?

б) Длина прямоугольника равна 5 см. Какой должна быть ширина этого прямоугольника, чтобы периметр прямоугольника был меньше 18 см?

в) От дома Вани до школы более 1,6 км. С какой средней скоростью должен идти Ваня, чтобы дойти до школы за 24 минуты?

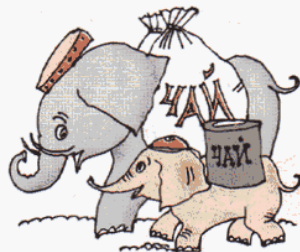
г) Коля и Наташа проплыли в лодке 10 км. При этом часть маршрута они проплыли по течению реки, а оставшуюся часть – против течения реки. Собственная скорость лодки равна 7 км/ч, а скорость течения реки равна 2 км/ч. Сколько километров проплыли Коля с Наташей по течению реки, если на всю дорогу они потратили менее 1,5 часа?

д) Плата за аренду офиса состоит из первоначального взноса и платы за каждый день аренды. На сколько полных дней можно арендовать помещение и заплатить при этом менее 15 000 р., если первоначальный взнос составляет 8000 р., а плата за каждый день аренды составляет 800 р.?

е) Какое количество целых мешков с чаем можно перевезти за один раз на машине грузоподъемностью 3,5 тонны, если масса каждого мешка равна 60 кг?

489 Найдите все неотрицательные решения неравенства:

- а) $\frac{x}{2} + 6 > \frac{x}{5} - 7$; в) $9 - 5z - \frac{2z}{5} < 6 - \frac{3z}{4} - 4z$;
 б) $3y - \frac{y}{4} < \frac{y}{7} + 5$; г) $4t + 12 + \frac{3t}{4} > -\frac{7t}{8} - 8t$.



490 Определите знак числа a , если:

- а) $a - 5 \leq b - 5$ и $b < -7$;
 в) $7 - c + 4 < a - 10$ и $c < 19$;
 б) $3a + 4 > 3c - 8$ и $c > 5$;
 г) $4 - a - 9 \geq c + 6$ и $c > -10$.



491 При каких значениях переменной истинно неравенство:

- а) $\frac{3a+2}{7} - 2a > \frac{4a-9}{-4}$;
 б) $3b - \frac{b-9}{-6} < \frac{5-2b}{4}$;
 в) $\frac{6c-5}{4} \leq 5c - \frac{7c-11}{3}$;
 г) $\frac{d+6}{5} - \frac{3d-11}{4} \geq d$;
 д) $a \leq \frac{a-2}{3} + \frac{3a-4}{5} - \frac{4a-3}{6}$;
 е) $\frac{b-4}{2} + \frac{b-2}{3} - \frac{b-1}{4} \geq \frac{b+3}{6}$;
 ж) $\frac{3c-7}{10} - \frac{8-9c}{14} < \frac{6c+4}{5} - \frac{3-2c}{7}$;
 з) $\frac{6d-2}{3} - \frac{2(d+1)}{5} > \frac{4(d+5)}{2}$.

492 Решите неравенство:

- а) $\frac{m}{2} - \frac{m}{4} - \frac{m}{6} - \frac{m}{8} < 9$;
 б) $2n - \frac{4n}{5} + 7 > \frac{2n}{3} + 9 - \frac{5n}{6} + \frac{3n}{4} + \frac{1}{20}$;
 в) $\left(3p + \frac{3p}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(2p + \frac{2p}{3}\right) \cdot 8 \leq 7$;
 г) $\left(4q - \frac{3q}{8}\right) \cdot \frac{8}{5} - \left(3q - \frac{2q}{7}\right) \cdot 7 \geq 12$;
 д) $x + \frac{1 - \frac{4x}{3}}{5} - \frac{3 - \frac{6x}{5}}{3} \geq 4$;
 е) $3y + 4 - \frac{2y - \frac{4-3y}{2}}{4} < \frac{5y - \frac{y-3}{4}}{2}$;
 ж) $4z - \frac{\frac{z}{2} - \frac{3+z}{4}}{2} > 5 - \frac{0,5\left(1 - \frac{6-z}{2}\right)}{2}$;
 з) $6 - \frac{t - \frac{1+t}{5}}{2} \leq \frac{t}{10} - \frac{2t - \frac{9-7t}{2}}{5}$.

493 Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

- а) $7 - \frac{x}{3} > \frac{2x}{9} + 9$; $x \in (-11; 4)$;
 в) $4 + 3z - \frac{7z}{4} < \frac{3z}{2} - 2z$; $z \in [-9; -1]$;
 б) $5y + \frac{2y}{5} < 4 + \frac{5y}{3}$; $y \in [-2; 7)$;
 г) $7 - \frac{2t}{3} > -\frac{3t}{4} - 2t$; $t \in (-3; 7]$.

494 Найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству:

- а) $x + a < 5$;
 б) $3 - x > b + 4$;
 в) $x - c \leq 3$;
 г) $x + a \geq b + 7$;
 д) $6x + d > 12$;
 е) $3x - c < a + 8x$;
 ж) $9x + 3a < 6x - 6c$;
 з) $8c - 4x > 5a - 7x$;
 и) $x < \frac{x}{a} - b$;
 к) $x + a > \frac{x}{b}$;
 л) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} < c$;
 м) $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} > d$.

π

495 Сравните значения числовых выражений:

- а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ и $\frac{7}{8}$;
 б) $\frac{5}{9} - \frac{1}{3}$ и $\frac{4}{9}$;
 в) $1 - \frac{11}{12}$ и $\frac{13}{12} - 1$;
 г) $\frac{5}{6} - \frac{6}{7}$ и $\frac{7}{8} - \frac{8}{9}$.

496 Какие высказывания являются общими, а какие – высказываниями о существовании? Докажите истинные высказывания, а для ложных высказываний постройте их отрицание и убедитесь в истинности отрицаний.

- а) Все элементы множества $\{-2; 0; 4; 5; 9\}$ являются решениями неравенства $x + 4 \geq 0$.
 б) Все решения неравенства $x + 4 \geq 0$ являются элементами множества $\{-2; 0; 4; 5; 9\}$.
 в) Неравенство $2y + 7 < 15$ имеет натуральные решения.
 г) Все решения неравенства $2y + 7 < 15$ – натуральные числа.
 д) Некоторые положительные числа являются решениями неравенства $6a + 4 > 0$.
 е) Все положительные числа являются решениями неравенства $6a + 4 > 0$.

497 Приведите дроби к общему знаменателю:

- а) $\frac{5}{1391}$ и $\frac{7}{2033}$; б) $\frac{3}{2921}$ и $\frac{4}{3683}$; в) $\frac{7}{5215}$ и $\frac{2}{19817}$.

498 а) Строительная компания получила заказ на облицовку здания декоративной плиткой. Первая бригада может выполнить этот заказ за 75 рабочих дней, а вторая может выполнить 20% заказа за 12 рабочих дней. Сколько рабочих дней потребуется этим двум бригадам для выполнения всего заказа, если они будут работать вместе с указанной производительностью?

б) На шоколадной фабрике имеются 18 фасовочных линий, работающих с одинаковой производительностью. Они выполняют дневное производственное задание за 14 часов. Сколько нужно добавить фасовочных линий, чтобы выполнить эту же работу за 9 часов?

в) Для наполнения бассейна используются три трубы. Через первую трубу пустой бассейн наполняется за 27 часов, через вторую – за 18 часов, а через третью – за 54 часа. За какое минимальное время можно наполнить этот пустой бассейн?

г) На заводе по производству мороженого работают 420 рабочих. Профсоюз рабочих принял решение сократить рабочий день с 8 часов до 6 часов. Сколько рабочих необходимо будет принять на завод для того, чтобы сохранить неизменным ежедневный выпуск продукции, считая, что все рабочие работают с одинаковой производительностью?



499 Постройте график кусочно-линейной функции. Определите по графику, при каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля.

- а) $y = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \geq 1; \\ 3, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -3x, & \text{если } x < -1 \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} 6x - 5, & \text{если } x \geq 2; \\ x + 5, & \text{если } -2 \leq x < 2; \\ 7 + 2x, & \text{если } x < -2 \end{cases}$
- б) $y = \begin{cases} 4x + 5, & \text{если } x \geq 0; \\ 5, & \text{если } -1 \leq x < 0; \\ x + 6, & \text{если } x < -1 \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} -2x + 5, & \text{если } x \geq 3; \\ x - 4, & \text{если } 0 \leq x < 3; \\ -3x - 4, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

- 500** В первые пять дней месяца дорожная бригада ремонтировала дорогу со скоростью 5 км в день. Затем, получив дополнительное оборудование, она в течение 10 дней ремонтировала 15 км в день. После этого в течение 5 дней бригада не работала. В последующие 10 дней бригада ремонтировала дорогу со скоростью 12 км в день. Запишите формулу зависимости длины отремонтированной дороги s (в км) от времени работы бригады t (в днях) и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ost .



- 501** Найдите сумму многочленов P , Q и R :

а) $P = 4a^2 - (9a^2 + 3c)$,

$Q = 7c - (10a^2 + 5c)$,

$R = 5a^2 - (2c - 4a^2)$;

б) $P = x^3 + 3xy + 2y^3 - (3x^3 - 2xy + 5y^3)$,

$Q = 3x^3 - 5xy - 3y^3 - (5x^3 + 7xy + 4y^3)$,

$R = -4x^3 - 5xy - 2y^3 - (3x^3 - 7xy - 6y^3)$.

- 502** Разложите на множители:

а) $x^7 + x^5 + x^2 + 1$;

б) $y^3 + 27 + 7y^2 + 21y$;

в) $a^2b^4 + a^2bc^3 - a^2b^3c - a^2c^4$;

г) $x^2y^4z^2 - x^2y^2z^4 + x^4y^2z^2 - x^4z^4$;

д) $(p^2 + 3pq + 4q^2)^2 - (p^2 + 4q^2)^2$;

е) $(7n^2 - 4n^3 + 3n^6)^2 - (3n^6 - 3n^3)^2$.

- 503** Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) $3n$ и $3n + 3$ ($n \in \mathbb{Z}$);

в) $24n + 18$ и $24n + 12$ ($n \in \mathbb{Z}$);

б) $6n$ и $6n + 2$ ($n \in \mathbb{Z}$);

г) $7n$ и $14n + 7$ ($n \in \mathbb{Z}$).

- 504** Постройте график функции $y = f(x)$. Определите по графику, при каких значениях x значение y больше нуля, равно нулю, меньше нуля.

а) $f(x) = |x + 3| - |x - 4|$;

в) $f(x) = -|7 - x| - |x - 3|$;

б) $f(x) = |x - 5| + |6 - x|$;

г) $f(x) = |x + 4| - |8 - x|$.

- 505** Разложите на множители:

а) $xy(x - y) - xz(x - z) - yz(z - y)$;

в) $m^2(n - k) - n^2(m - k) + k^2(m - n)$;

б) $ab(a + b) + ac(a - c) - bc(b + c)$;

г) $p^3(q - r) + q^3(r - p) + r^3(p - q)$.

D

- 506** Решите неравенство:

а) $4x < -32$;

д) $3a - 4 \geq -13$;

и) $-5m + 3 > -9m - 17$;

б) $7y > 28$;

е) $8b + 5 < 21$;

к) $8n - 6 \leq 9n + 14$;

в) $-\frac{3}{5} \leq -6z$;

ж) $-14c + 9 > -47$;

л) $5p + 10 \geq -9p - 18$;

г) $\frac{2}{3}t \geq -24$;

з) $9 - 5d \leq -26$;

м) $-6q - 5 < -8q + 11$.

- 507** Равносильны ли неравенства?

а) $x - 5 < -2$ и $x < 3$;

в) $3a < 27$ и $-a > -9$;

б) $2y > 12$ и $-y > -6$;

г) $12b - 15 < 21$ и $-4b > 12$.

517 Решите неравенство:

а) $\frac{4x-3}{4} > \frac{2x+3}{5};$

в) $\frac{2x+5}{2} - 7 \leq \frac{3x+7}{3} - 12;$

б) $\frac{1-3y}{3} < \frac{8+7y}{-4};$

г) $\frac{3y-6}{7} - 15 \geq \frac{2y+5}{-4} - 16.$

518 Имеет ли неравенство решения при указанном значении a ?

а) $7x - a > 2(4x - 3), a = 2;$

в) $6(2t + 4) - 2a \leq 12t + 12, a = -5;$

б) $3(2z - 4) < 6z + 2a, a = -3;$

г) $9(s - 3) - 5s \geq 4s + 3a, a = 4.$

519 Решите неравенство:

а) $7(2x + 6) > 35(3x - 4);$

в) $72(5t + 3) \leq -24(16 - 9t);$

б) $9(3y - 7) < -3(12 - 5y);$

г) $-25(7a - 5) \geq -40(2 - 4a).$

520 а) Длина одной стороны прямоугольника на 3 см больше длины другой. Какой может быть длина этой стороны, если периметр этого прямоугольника меньше 24 см?

б) От офиса компании до склада менее 27 км. Сколько времени понадобится для того, чтобы проехать на автомобиле от офиса до склада, если средняя скорость движения равна 36 км/ч?

в) Сколько мешков с картошкой можно разместить на складе вместимостью 50 тонн, если масса каждого мешка 28 кг?

521 При каких значениях переменной истинно неравенство?

а) $\frac{4a+7}{3} - 5a > \frac{3a-11}{2};$

в) $5a \geq \frac{2a-1}{3} + \frac{3a-1}{4} + \frac{4a-1}{5} + 2;$

б) $3b - \frac{b-3}{4} < \frac{8-b}{5};$

г) $\frac{b+3}{7} + \frac{b+4}{5} - \frac{b+5}{3} \leq \frac{b-7}{21}.$

522 Найдите все неположительные решения неравенства:

а) $\frac{3x}{4} + 6 > \frac{2x}{7} + 9;$

б) $11 - 6z + \frac{4z}{9} > 9 - \frac{7z}{3} - 2z.$

523 Решите неравенство:

а) $\frac{m}{5} - \frac{m}{4} - \frac{m}{3} - \frac{m}{2} < 53;$

в) $3x + \frac{2 - \frac{7x}{6}}{4} - \frac{4 - \frac{5x}{4}}{6} \geq 5;$

б) $(5q - \frac{5q}{4}) \cdot \frac{4}{3} + (6q - \frac{6q}{11}) \cdot 11 \leq 5;$

г) $7 - \frac{3t - \frac{4+t}{3}}{5} < \frac{5t}{3} - \frac{2t - \frac{11-4t}{5}}{3}.$

524 Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

а) $9 - \frac{x}{4} > \frac{3x}{8} + 11$, где $x \in (-15; 2);$

б) $5 + 8z - \frac{9z}{5} < \frac{5z}{4} + 7z$, где $z \in [-3; 27].$

525 Разложите на множители:

а) $x^3 - 64 + 9x^2 - 36x;$

б) $a^3b^5 - a^3b^3c^2 + a^2b^2c^2 - a^2c^4;$

в) $(3d^5 - 5d^3 + 8d^6)^2 - (3d^5 - 8d^6)^2.$

526 Найдите сумму многочленов P , Q и R :

а) $P = 6m^3 - (5m^2 + 2m)$,

б) $P = a^2 + ab + b^2 - (a^2 - ab + b^2)$,

$Q = 5m - (3m^2 + 2m)$,

$Q = 4a^2 - 2ab + b^2 - (8a^2 + 2ab + 6b^2)$,

$R = 8m^2 - (m - 2m^3)$;

$R = -3a^2 + 2ab - b^2 + (2a^2 - 4ab + 5b^2)$.

527 а) Мастерская по реставрации картин получила заказ от своего клиента. Первый реставратор может выполнить эту работу за 30 рабочих дней, а второй может выполнить 40% заказа за 18 рабочих дней. Сколько рабочих дней потребуется этим двум реставраторам для выполнения всего заказа, если они будут работать вместе и производительность будет та же?

б) В пончиковой компании работают 8 поваров. Они могут выполнить дневное производственное задание за 14 часов. Сколько поваров надо принять в компанию, чтобы они могли выполнить то же самое дневное задание за 8 часов, если производительность всех поваров одинаковая?

528 Первые три часа пути турист прошел со скоростью 4 км/ч. Затем он увеличил скорость и в течение 2 часов шел со скоростью 5 км/ч. После этого он сделал привал и отдыхал 2 часа. После привала турист шел четыре часа со скоростью 3 км/ч. Запишите формулу зависимости длины пути s (в км), пройденного туристом, от времени t (в часах) и постройте график этой зависимости на координатной плоскости Ost .

529 Постройте график кусочно-линейной функции. Определите по графику, при каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля.

а) $y = \begin{cases} 4x, & \text{если } x \geq 1; \\ 4, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -4x, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 3x - 5, & \text{если } x \geq 2; \\ x - 1, & \text{если } -2 \leq x < 2; \\ 3 + 3x, & \text{если } x < -2 \end{cases}$

530 Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) $2n$ и $2n + 2$ ($n \in \mathbb{Z}$);

б) $5n$ и $10n + 5$ ($n \in \mathbb{Z}$).

531 Постройте график функции $y = f(x)$. Определите по графику, при каких значениях x значение y больше нуля, равно нулю, меньше нуля.

а) $f(x) = |x + 2| - |x - 5|$; б) $f(x) = -|9 - x| - |x - 2|$.

532 Решите неравенство $ax \geq b$:

$a = \frac{4,06 \cdot 0,0058 + 3,3044895 - (0,7584 : 2,37 + 0,0003 : 8)}{0,03625 \cdot 80 - 2,43}$;

$b = \frac{5,7 \cdot 16,2}{20,52} + \frac{127,68 \cdot 0,5}{4,56} + \frac{34,68 \cdot 15,4}{6,8 \cdot 3,57} - 0,5$.



533* Найдите девять последовательных целых чисел, сумма первых трех из которых равна сумме шести последних.

534* В трех домах живут Винни-Пух, Пятачок и Сова. На первом из этих домов находится табличка «Винни-Пух», на втором – «Сова», а на третьем – «Винни-Пух или Пятачок». Известно, что в каждом из домов живет кто-то один, при этом в нем живет не тот, чье имя указано на табличке. Кто в доме с какой табличкой живет?

2. Решение неравенств с модулями*



Стремиться найти истину – заслуга, даже если на этом пути и блуждаешь.

Георг Кристоф Лихтенберг (1742–1799), немецкий ученый и публицист

В предыдущих пунктах мы с вами научились решать линейные уравнения и неравенства, уравнения с модулями, сводящиеся к линейным. Разберемся теперь с тем, как решать неравенства с модулями.

Прежде всего, вспомним, какие числовые промежутки являются решениями простейших неравенств с модулями: $|x| > c$, $|x| \geq c$, $|x| < c$, $|x| \leq c$ ($c \in \mathbb{Q}$).

$c > 0$			$c \leq 0$	
Неравенство	Схема	Множество решений	Неравенство	Множество решений
$ x > c$		$(-\infty; -c) \cup (c; +\infty)$	$ x > c$	$(-\infty; +\infty)$
$ x \geq c$		$(-\infty; -c] \cup [c; +\infty)$	$ x \geq c$	$(-\infty; +\infty)$
$ x < c$		$(-c; c)$	$ x < c$	$\emptyset$
$ x \leq c$		$[-c; c]$	$ x \leq c$	Если $c < 0$, то $\emptyset$ Если $c = 0$, то $\{0\}$

Рассмотрим теперь неравенства, в которых под знаком модуля стоит не x , а выражение вида $kx + b$, где $k, b \in \mathbb{Q}$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

Решите неравенство: $|3x + 2| > -2$.

Решение:

$|3x + 2| \geq 0$, а $(-2) < 0$. И поскольку неотрицательное число всегда больше отрицательного, то данное неравенство верно при любых значениях x .

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Пример 2.

Решите неравенство: $|7x - 9| \leq -5$.

Решение:

$|7x - 9| \geq 0$, а $(-5) < 0$. И поскольку неотрицательное число не может быть меньше или равно отрицательному числу, то данное неравенство всегда неверно.

Ответ: $\emptyset$.

Пример 3.

Решите неравенство: $|4x - 6| \geq 10$.

Решение:

Модуль числа больше или равен 10, если это число либо больше или равно 10, либо меньше или равно (-10) . Значит,

$$|4x - 6| \geq 10 \Leftrightarrow 4x - 6 \geq 10 \text{ или } 4x - 6 \leq -10$$

Решим каждое из двух полученных неравенств, а затем найдем объединение множеств их решений.

$$1) 4x - 6 \geq 10 \Leftrightarrow 4x \geq 10 + 6 \Leftrightarrow 4x \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 4 \Leftrightarrow x \in [4; +\infty)$$

$$2) 4x - 6 \leq -10 \Leftrightarrow 4x \leq -10 + 6 \Leftrightarrow 4x \leq -4 \Leftrightarrow x \leq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1]$$

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Пример 4.

Решите неравенство: $|5x + 1| < 3$.

Решение:

Модуль числа меньше 3, если это число принадлежит открытому интервалу от -3 до 3. Значит,

$$|5x + 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 5x + 1 < 3$$

Решим полученное двойное неравенство:

$$-3 < 5x + 1 < 3 \Leftrightarrow -3 - 1 < 5x < 3 - 1 \Leftrightarrow -4 < 5x < 2 \Leftrightarrow -0,8 < x < 0,4$$

Ответ: $(-0,8; 0,4)$.

Что касается неравенств с несколькими модулями, то способ их решения аналогичен способу, который мы использовали при решении уравнений с модулями: сначала надо выделить числовые промежутки, на которых выражения под знаком модуля не меняют свой знак, а затем найти решения неравенств на каждом из выделенных промежутков. Решением неравенства будет объединение всех полученных решений.

Однако прежде чем приступать к решению неравенств с модулями указанным способом, надо внимательно посмотреть на неравенство, так как иногда только лишь по виду неравенства можно сделать вывод о множестве его решений.

Пример 5.

Решите неравенство: $|6x + 12| + |4x - 9| \leq -7$.

Решение:

Заметим, что сумма двух модулей всегда число неотрицательное, поэтому она не может быть меньше или равна отрицательному числу. Следовательно, данное неравенство не имеет решений ни при каких значениях x .

Ответ: $\emptyset$.

Пример 6.

Решите неравенство: $|3x - 4| + |7x - 2| > -11$.

Решение:

Сумма двух модулей всегда число неотрицательное, а поэтому всегда больше отрицательного числа. Значит, данное неравенство верно при всех значениях x .

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Пример 7.Решите неравенство: $|x - 3| + |x + 4| > 9$.*Решение:*

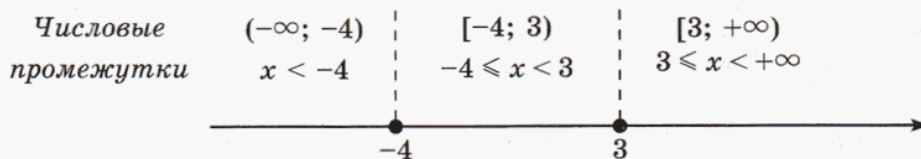
Решим неравенство способом, аналогичным тому, который мы использовали при решении уравнений с модулями.

1. Под знаком модуля находятся выражения: $x - 3$; $x + 4$.

2. Найдем корни уравнений:

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \qquad x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

3. Отметим найденные корни уравнений на «упрощенной» модели числовой прямой и определим непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные числа разбивают числовую прямую.



4. Проверим, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую:

$$(-\infty; -4) \cup [-4; 3) \cup [3; +\infty) = (-\infty; +\infty).$$

5. Выпишем определение модуля каждого из выражений и установим для всех числовых промежутков, чему равно значение модуля.

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{если } x \geq 3, \\ 3 - x, & \text{если } x < 3 \end{cases}$$

$$|x + 4| = \begin{cases} x + 4, & \text{если } x \geq -4, \\ -x - 4, & \text{если } x < -4 \end{cases}$$



Промежутки	$(-\infty; -4)$	$[-4; 3)$	$[3; +\infty)$
Выражения с модулем			
$ x - 3 $	$3 - x$	$3 - x$	$x - 3$
$ x + 4 $	$-x - 4$	$x + 4$	$x + 4$

6. Теперь для каждого числового промежутка запишем и решим неравенство без знаков модуля, равносильное исходному.

1) $x < -4$, или $x \in (-\infty; -4)$ 2) $-4 \leq x < 3$, или $x \in [-4; 3)$ 3) $x \geq 3$, или $x \in [3; +\infty)$

$$(3 - x) + (-x - 4) > 9$$

$$3 - x - x - 4 > 9$$

$$-2x > 9 - 3 + 4$$

$$-2x > 10$$

$$x < -5, \text{ или } x \in (-\infty; -5)$$

$$(3 - x) + (x + 4) > 9$$

$$3 - \cancel{x} + \cancel{x} + 4 > 9$$

$$7 > 9 \text{ (ложно)}$$

Нет решений

 $\emptyset$

$$(x - 3) + (x + 4) > 9$$

$$x - 3 + x + 4 > 9$$

$$2x > 9 + 3 - 4$$

$$2x > 8$$

$$x > 4, \text{ или } x \in (4; +\infty)$$

7. Найдем пересечение каждого числового промежутка и соответствующего ему множества решений.



1) $(-\infty; -5) \cap (-\infty; -4) = (-\infty; -5)$; 2) $[-4; 3] \cap \emptyset = \emptyset$; 3) $[3; +\infty) \cap (4; +\infty) = (4; +\infty)$.

Решением исходного неравенства является объединение множеств решений, полученных на всех числовых промежутках.

8. Ответ: $(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$.

Итак, обобщая способ решения неравенства с несколькими модулями, сводящегося к линейному, приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм решения неравенств с модулями

1. Найти в неравенстве все выражения, содержащиеся под знаком модуля.
2. Приравнять каждое из этих выражений к нулю и найти корни полученных уравнений.
3. Отметить найденные корни уравнений на «упрощенной» модели числовой прямой и определить непересекающиеся числовые промежутки, на которые данные точки разбивают числовую прямую.
4. Проверить, что объединение найденных числовых промежутков составляет всю числовую прямую.
5. Установить для всех числовых промежутков, чему равно значение каждого модуля: самому выражению, содержащемуся под знаком модуля, или выражению, противоположному ему.
6. Для каждого числового промежутка записать и решить исходное неравенство без знаков модуля.
7. Найти пересечение полученных множеств решений и соответствующих числовых промежутков.
8. В ответе записать объединение всех получившихся множеств решений.

К

535 Сравните значения числовых выражений:

- а) $|-4| + |-9|$ и $(-4) + (-9)$; г) $|-4,3| \cdot |9,4|$ и $(-4,3) \cdot |9,4|$;
 б) $|-2,4| + 7,2$ и $(-2,4) + |7,2|$; д) $|-8,2| \cdot |-3,6|$ и $|-8,2| \cdot (-3,6)$;
 в) $-6,8 - |-5|$ и $-6,8 - (-5)$; е) $|7,14| : |-4,5|$ и $(7,14) : |-4,5|$.

536

Решите неравенство, пользуясь определением модуля:

- а) $|x| > 5$; в) $|z| \leq 3$; д) $|-r| < -7$; ж) $|n| < 0$; и) $|a| > 0$;
 б) $|y| < 7$; г) $|-t| \geq 6$; е) $|-p| > -3$; з) $|m| \leq 0$; к) $|b| \geq 0$.

537

Решите неравенство:

- а) $|x + 1| < 5$; г) $|-t + 1| > 9,4$; ж) $|-9c - 7| \leq 36$;
 б) $|y - 2| > 4$; д) $|2a - 5| \leq 11$; з) $|-5d + 2| > -40$;
 в) $|-z + 3| \geq 3,6$; е) $|-3b + 1| < 26$; и) $|-2,1s - 4| > 21$.

538 Докажите, что данное неравенство будет истинным при любых значениях переменной:

а) $|x + 5| \geq -7$; б) $-|y - 6| < 4$; в) $-|9 + 2r| \leq 11$; г) $|29 - 4s| > -51$.

539 Докажите, что данное неравенство не имеет решений:

а) $|a - 9| < -17$; б) $-|b + 12| \geq 15$; в) $-|18 + 3c| > 25$; г) $|38 - 4d| \leq -29$.

540 При каких значениях переменной указанные неравенства являются истинными высказываниями?

а) $|6x + 7 - 2x| < 13$; г) $-|-7t - 16 + 4t| \leq -2$; ж) $|14c + 2c - 8 - 21c| < -3$;

б) $|2y - 9 + y| > 5$; д) $|5a - 11a + 7| > 8$; з) $|-2d + 7d - 13d| \leq 0$;

в) $|12 - 4z - 4| \geq 18$; е) $-|-17 - 9b + 23| \leq -6$; и) $|5p + 12 + 3p| > -12$.

541 Решите неравенство:

а) $|x + 7| < |x - 9|$;

ж) $|2a - 8| > |6a + 9|$;

б) $|y - 5| > |11 - y|$;

з) $-|4b - 28| \leq |15 - 3b|$;

в) $|z + 12| \geq -|z + 4|$;

и) $|11c - 5 - 6c| < |12 - 4c + 2 - 3c|$;

г) $-|s + 13| > |s - 2|$;

к) $|15d + 21 - 8d| \geq |13 - 4d + 3|$;

д) $-|8 - r| \leq -|r - 6|$;

л) $|8m + 24| > -|7m + 4 - 9m + 8|$;

е) $|3 - t| < |14 - t|$;

м) $-|-4 - 7n - 16 + 22n| \geq |14 - 2n + 8n + 10|$.

542 При каких значениях переменной:

а) значение выражения $|a - 9|$ больше 6;

б) значение выражения $|47 - 5b|$ меньше 12;

в) значение выражения $|7c - 21|$ меньше или равно значению выражения $|6c + 24|$;

г) значение выражения $|3d + 27|$ больше или равно значению выражения $|42 - 6d|$;

д) сумма значений выражений $|2x + 16|$ и $|x + 9|$ не больше 20;

е) разность значений выражений $|6y - 48|$ и $|5y + 20|$ не меньше 8.

543 При каких значениях переменной значение выражения:

а) $|2x - 1| + |3x + 12|$ положительно; г) $|4a - 8| - |5a + 15|$ отрицательно;

б) $|6y - 12| - |9y + 36|$ неотрицательно; д) $|14 + 2b| - |b - 7|$ неположительно;

в) $|5z + 2| + |9z - 6|$ отрицательно; е) $-|8 + c| - |10 - 2c|$ положительно.

544 Докажите, что:

а) число $(-1,5)$ является решением неравенства $|4x| \geq |4x + 8|$;

б) неравенство $|y - 7| + 9 < 0$ не имеет решений;

в) неравенство $|5z - 8| > -27$ верно при всех значениях переменной;

г) неравенство $|t + 5| + |2 - t| \leq -12$ не имеет решений;

д) число 3 является решением неравенства $|2a + 5| > |4 - 2a| + 1$;

е) число 2 является решением неравенства $|4b - 16| \leq |3b - 45|$.

545 Найдите все значения a , при которых неравенство $|3a + 4x| < |6x - 2|$ истинно при:

а) $x = 5$;

б) $x = -3$;

в) $x = 7$;

г) $x = -2$.

546 Решите неравенство:

- а) $|x - 2| + |x - 4| \geq 2$; л) $|3b - 9| + |2b + 8| > 18$;
 б) $|y + 9| + |y - 7| < 7$; м) $|4a + 12| < 9 + |3a - 6|$;
 в) $|z| - |z - 5| \leq 11$; н) $|1 - 2c| - |3c + 9| \leq 6$;
 г) $|p - 3| - |p - 4| > 5$; о) $|2d - 10| + 6 \geq |d + 7| + 4$;
 д) $|6 + t| - |4 - t| < -1$; п) $|5 - 2k| + |7k + 14| > -13$;
 е) $|3 - q| + |q - 9| \geq 8$; р) $|3m - 21| - 9 > 5 - |6 + m|$;
 ж) $-\lvert 3 + r \rvert - \lvert r + 7 \rvert > 21$; с) $\lvert 5n + 15 \rvert - \lvert 11 - n \rvert < -4$;
 з) $\lvert 4 - s \rvert - \lvert 9 - s \rvert \leq 1$; т) $12 - \lvert 21 - 3p \rvert \leq 14 - \lvert 12 - p \rvert$;
 и) $\lvert m + 2 \rvert - 8 < \lvert m + 1 \rvert - 3$; у) $5 - \lvert 6q - 18 \rvert \geq \lvert 9 - q \rvert$;
 к) $\lvert n - 5 \rvert + 6 \geq 17 - \lvert n - 15 \rvert$; ф) $\lvert r - 13 \rvert - 9 < 4 + \lvert 7r + 28 \rvert$.

547 Докажите, что при указанном значении a неравенство имеет не менее десяти решений:

- а) $\lvert 4x - a \rvert < \lvert 5x - 2 \rvert$, $a = 12$; г) $\lvert 3p + 9 - a \rvert \leq \lvert 7p + 14 \rvert$, $a = 6$;
 б) $\lvert y + 2a \rvert > \lvert y + 7 \rvert$, $a = -3$; д) $\lvert 2q - a \rvert > \lvert 9q - 8 - 7q \rvert$, $a = -8$;
 в) $\lvert 5z + 10 \rvert \geq \lvert 6z + 2a \rvert$, $a = -4$; е) $\lvert 15r - 21 - 8r \rvert \leq \lvert 5r + a \rvert$, $a = 15$.

548 Найдите все решения неравенства:

- а) $\lvert x + 9 \rvert + \lvert x - 6 \rvert < \lvert x + 5 \rvert - 4$; д) $\lvert a - 6 \rvert + \lvert a - 8 \rvert + \lvert a + 10 \rvert < -19$;
 б) $\lvert y - 7 \rvert > \lvert y + 2 \rvert + \lvert y - 3 \rvert - 15$; е) $\lvert b + 4 \rvert > \lvert 15 - b \rvert - \lvert b + 9 \rvert - 14$;
 в) $\lvert z + 5 \rvert - \lvert z - 8 \rvert \geq \lvert z + 7 \rvert + 2$; ж) $\lvert 4t - 8 \rvert + \lvert 3t - 9 \rvert + \lvert 6t + 12 \rvert \leq 30$;
 г) $\lvert c - 10 \rvert \leq 9 - \lvert c - 5 \rvert + \lvert c - 3 \rvert$; з) $18 + \lvert 6d - 3 \rvert - 9 - \lvert 2d + 8 \rvert \geq \lvert 4 - 16d \rvert$.

549 При каких значениях переменной указанные неравенства являются истинными высказываниями?

- а) $\lvert 6x + 12 \rvert + \lvert 7x - 14 \rvert < \lvert 8x + 4 \rvert$; д) $\lvert 7z - 2 \rvert \geq \lvert 2z + 1 \rvert + \lvert 3z - 6 \rvert - 9$;
 б) $\lvert 7a + 2 \rvert > \lvert 14 - 2a \rvert - \lvert 5a + 15 \rvert$; е) $11 - \lvert 2d - 8 \rvert - \lvert 3d + 15 \rvert < \lvert 6d - 18 \rvert$;
 в) $\lvert 5x - 12 \rvert - \lvert 3x - 1 \rvert \geq \lvert 11 - 2x \rvert$; ж) $\lvert 3c - 9 \rvert + 4 \leq \lvert 8 - 2c \rvert - \lvert 5c - 10 \rvert$;
 г) $\lvert 4 - 16y \rvert + \lvert 12y - 5 \rvert \leq \lvert 12 + 4y \rvert$; з) $\lvert 6t + 4 \rvert + 19 > \lvert 1 - 3t \rvert - \lvert 5 - 2t \rvert$.

550 Решите неравенство:

- а) $\lvert x + 5 \rvert + \lvert x - 4 \rvert + \lvert x + 3 \rvert + \lvert x - 2 \rvert < 15$;
 б) $\lvert y - 8 \rvert - \lvert y + 1 \rvert + \lvert y - 4 \rvert > \lvert y + 6 \rvert - 12$;
 в) $\lvert z + 9 \rvert \geq \lvert z - 3 \rvert - \lvert z + 11 \rvert + \lvert z + 7 \rvert + 21$;
 г) $\lvert t + 7 \rvert - \lvert t - 9 \rvert \leq \lvert t + 8 \rvert + \lvert t - 12 \rvert - 18$;
 д) $\lvert a - 12 \rvert + \lvert a - 6 \rvert + \lvert a + 5 \rvert > \lvert a + 10 \rvert - 24$;
 е) $\lvert b + 2 \rvert - \lvert 8 - b \rvert < \lvert 9 - b \rvert - \lvert b + 8 \rvert - 12$;
 ж) $\lvert c - 4 \rvert \leq 20 - \lvert c - 2 \rvert + \lvert c - 7 \rvert + \lvert c - 3 \rvert$;
 з) $\lvert d + 3 \rvert - \lvert d - 5 \rvert \geq \lvert d - 6 \rvert - \lvert d - 2 \rvert + 10$.



551 Найдите все неотрицательные решения неравенства:

- а) $|3x + 9| - |6x - 12| + |5x + 10| + |2x - 7| \leq 16$;
 б) $|4y - 14| + |7y + 21| > |y - 7| - |9y + 18| + 21$;
 в) $|8z + 24| \geq |3z - 15| - |6z + 6| - |11z + 22| - 36$;
 г) $|12a - 48| + |9a - 45| + |7a + 49| < |2a + 11| - 9$;
 д) $|2b + 1| > |5 - 2b| - |7 - 14b| - |9b + 27| + 95$;
 е) $|6c - 3| - |9c - 2| \leq |2c - 8| + |5c + 25| - 40$.



552 Найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству:

- а) $|x + a| < 5$; б) $|x - b| > 9$; в) $|6x - c| \geq 8$; г) $|8x + d| \leq 6$.

553 Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

- а) $|2y + 5| - |3y + 6| + |6y - 12| \leq 7$, где $y \in (-\infty; 25]$;
 б) $-|3 - 2z| > |4z + 8| - |6z - 12| - 5$, где $z \in (-41; +\infty)$;
 в) $|5x + 10| - |4x - 12| + 19 > |3x + 9|$, где $x \in [-1; 58]$;
 г) $|8t - 24| + |7t - 28| \geq |6t + 12| - 14$, где $t \in [-7; 14]$.



554 Прочитайте высказывания, записанные на математическом языке с помощью кванторов общности ($\forall$) и существования ($\exists$). Докажите истинные высказывания, а для ложных – постройте их отрицания.

- а) $\exists x \in \mathbb{Z}: 5x < 2$; д) $\forall n \in \mathbb{N}: 8n - 9 \geq 0$;
 б) $\forall m, n \in \mathbb{Q}: |m| + |n| > 0$; е) $\exists p, q \in \mathbb{Z}: |2p| < -|3q|$;
 в) $\forall p \in \mathbb{Q}: 7p \geq -|7p|$; ж) $\exists k \in \mathbb{Q}: 6 + k < |6 + k|$;
 г) $\exists b \in \mathbb{Z}: 3|b| + 2 \leq 9$; з) $\forall d \in \mathbb{Q}: 3d + 3 \leq 5d + 5$.

555 Переведите в указанные единицы измерения и вычислите:

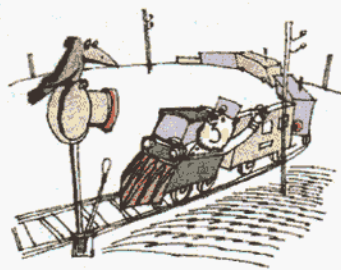
- а) в килограммы: 0,563 т + 71,52 кг + 3480 г – 0,09 ц; в) в часы: 90 мин + 1,25 суток – 10,5 ч + 90 000 с;
 б) в сантиметры: 25,9 м + 428,5 мм + 10,15 см – 16,8 дм; г) в рубли: 12,5 тыс. р. – 19 500 коп. + 129,8 р. – 80 коп.

556 Какие остатки дают натуральные степени числа a при делении на b ?

- а) $a = 3, b = 7$; в) $a = 7, b = 3$; д) $a = 9, b = 5$;
 б) $a = 3, b = 8$; г) $a = 7, b = 8$; е) $a = 9, b = 7$.

557 а) Два бегуна выбежали одновременно из двух пунктов навстречу друг другу и встретились через 1,5 ч. Найдите расстояние между этими пунктами, если скорости бегунов были равны 12 км/ч и 15 км/ч.

б) Два поезда выехали одновременно в одном направлении из двух разных городов, находящихся на расстоянии 160 км друг от друга. Скорость одного из поездов равна 60 км/ч. Чему равна скорость другого поезда, если поезда встретятся через 8 часов?



в) Из пунктов A и B , находящихся на расстоянии 420 км друг от друга, выехали одновременно в противоположных направлениях два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч. С какой скоростью ехал второй автомобиль, если через 6 часов расстояние между ними стало равно 1440 км?

г) Миша вышел из дома и увидел, что его друг Коля уходит гулять без него. Миша побежал за Колей и через 4 мин догнал своего друга. Какое расстояние было между Мишей и Колей в тот момент, когда Миша побежал за Колей, если скорость Миши была равна 170 м/мин, а скорость Коли – 80 м/мин?

558 Функция задана формулой. Найдите ее область определения:

а) $y = x^3 + 8$; в) $y = \frac{5}{2x - 6}$; д) $y = \frac{5 + 3x}{2x^4}$; ж) $y = \frac{2x + 4}{(x + 2)(x + 7)}$;

б) $y = 5x - 7$; г) $y = \frac{3x + 9}{7}$; е) $y = \frac{4x - 7}{6x - 9}$; з) $y = \frac{3(x - 2)(x + 5)}{x^3(2x + 10)(x - 4)}$.

559 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $(x + 3y) - ((5y - 6x) + 7) - (9x + 8y - 12)$;

б) $-(7p - 8q) + (-9p - (4q + 9)) - (9q - (8 + 14p)) - (5p - 11q)$;

в) $4s + 2(3t - (3r - 6s)) - (5s - 3(s - 4(t - 2r))) + 2(4t + 2r - 2(3t + 5s))$;

г) $-\frac{35}{abc} \cdot (4bc : 5) : (5ab^2c) \cdot (-6bc^3a) \cdot (5ab : 21c^2) : (2ab) \cdot (-bc) : (-c^2)$.

560 Найдите остаток от деления a на b :

а) $a = 333^{555}$, $b = 5$;

б) $a = 999^{777}$, $b = 7$;

в) $a = 597^{795}$, $b = 11$.

561 Найдите три значения x , таких, что:

а) $x \equiv 4 \pmod{11}$;

в) $x \equiv 12 \pmod{49}$;

д) $x \equiv 21 \pmod{62}$;

б) $x \equiv 9 \pmod{35}$;

г) $x \equiv 15 \pmod{51}$;

е) $x \equiv 37 \pmod{79}$.

562 Функция задана формулой. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно y_1 , y_2 и y_3 .

а) $y = \frac{7}{2 - 4x}$; $y_1 = 2$; $y_2 = 6$; $y_3 = -7$; в) $y = \frac{5x + 6}{2x - 11}$; $y_1 = 2$; $y_2 = -1$; $y_3 = 9$;

б) $y = \frac{4}{9x - 3}$; $y_1 = 1$; $y_2 = -3$; $y_3 = 5$; г) $y = \frac{12x - 7}{3x + 14}$; $y_1 = 1$; $y_2 = 2$; $y_3 = -1$.

Д

563 Решите неравенство:

а) $|x| < 7$;

в) $|-z + 3| \geq 5$;

д) $-|11c + 6| \geq 28$;

б) $|y| > 9$;

г) $|5 + a| \leq 15$;

е) $-|6d - 12| < -42$.

564 Докажите, что данное неравенство будет истинным при любых значениях переменной:

а) $|a + 21| \geq -12$;

в) $-|14 + 8a| < 25$;

б) $-|b - 9| \leq 0$;

г) $|53 - 6b| > -65$.

565 Докажите, что данное неравенство не имеет решений:

а) $|a - 12| < -6$;

в) $-|32 + 11c| > 39$;

б) $-|b + 29| \geq 31$;

г) $|47 - 17d| \leq -44$.



566 При каких значениях переменной указанные неравенства являются истинными высказываниями?

а) $|7x + 21| < 14$;

в) $|9z - 13z + 25| > 16$;

б) $|-9y - 36| \leq -18$;

г) $|-3s + 12s - 33 - 15s| \geq 3$.

567 Решите неравенство:

а) $|x + 11| < |x - 8|$;

д) $|3a - 12| \geq |7a + 21|$;

б) $|y + 7| \geq -|y + 3|$;

е) $|15b - 24 - 9b| < |19 - 7b + 3 - 4b|$;

в) $|-14 - z| \leq -|z - 9|$;

ж) $|8c + 32| > -|4c + 8 - 11c + 13|$;

г) $|5 - t| < |2 - t|$;

з) $|-9 - 11d - 29 + 26d| \leq |21 - 6d + 14d + 19|$.

568 При каких значениях переменной:

а) значение выражения $|a - 7|$ больше 11;

б) значение выражения $|56 - 8b|$ меньше 8;

в) значение выражения $|6c - 30|$ меньше или равно значению выражения $|8c + 48|$;

г) значение выражения $|4d + 16|$ больше или равно значению выражения $|63 - 7d|$;

д) сумма значений выражений $|3x + 15|$ и $|2x + 3|$ меньше 17;

е) разность значений выражений $|5y - 45|$ и $|2y + 10|$ больше 29.

569 Найдите все значения a , при которых неравенство $|4a + 5x| < |3x - 2|$ истинно при:

а) $x = 2$;

б) $x = -4$;

в) $x = 5$;

г) $x = -6$.

570 Решите неравенство:

а) $|x - 7| + |x - 5| > 9$;

ж) $|2a - 3| + |3a + 2| > 7$;

б) $|y + 4| + |y - 9| < 12$;

з) $|5b + 10| < 5 + |8b - 16|$;

в) $|2 - z| + |z - 3| \geq 4$;

и) $|7c - 28| - 2 \geq 9 - |12 + c|$;

г) $|-6 + t| - |t + 8| > 12$;

к) $|9d + 18| + |17 - d| < -8$;

д) $|9 - s| - |7 - s| \leq 21$;

л) $15 - |25 - 5p| \leq 27 - |12 - p|$;

е) $|k - 3| + 14 \geq 19 - |k + 11|$;

м) $|q - 9| - 15 < 2 + |6q + 30|$.

571 Докажите, что при указанном значении a неравенство имеет не менее десяти решений:

а) $|5x - a| < |5x - 6|$, $a = 10$;

в) $|2p + 11 - a| \leq |4p + 24|$, $a = 9$;

б) $|y + 2a| \geq |y + 8|$, $a = -2$;

г) $|7q - a| > |11q - 12 - 5q|$, $a = -14$.

572 Найдите все решения неравенства:

а) $|x + 11| + |x - 3| < |x + 7| + 9$;

г) $|3a - 11| + |6a - 1| + |7a + 9| < -31$;

б) $|y - 5| > |y + 4| + |y - 2| - 5$;

д) $|2b + 7| \geq |12 - 3b| - |4b + 10| - 6$;

в) $|z + 6| - |z - 9| \leq |z + 8| + 2$;

е) $|5c - 15| + |4c - 20| + |8c + 16| \leq 28$.

573 При каких значениях переменной указанные неравенства являются истинными высказываниями?

а) $|8x + 24| + |5x - 22| > |3x + 6|$;

в) $|4z - 16| \geq |3z + 15| + |5z - 35| - 28$;

б) $|9 - 2y| + |3y - 27| \leq |18 + 6y|$;

г) $|7t + 14| - 7 > |5 - 4t| - |9 - 3t|$.

574 Решите неравенство:

- а) $|x + 7| + |x - 11| + |x + 10| + |x - 6| < 36$;
 б) $|y - 4| - |y + 8| + |y - 5| > |y + 3| - 24$;
 в) $|z + 12| \geq |z - 9| - |z + 7| + |z + 6| - 5$;
 г) $|t + 11| - |t - 2| \leq |t - 9| - |t - 4| + 3$.

575 Найдите все неположительные решения неравенства:

- а) $|6x + 12| - |2x - 3| + |4x + 2| + |9x - 3| \leq 17$;
 б) $|5y - 1| + |7y + 14| > |y - 6| - |3y + 12| + 2$;
 в) $|2c - 15| - |10c - 9| \geq |3c - 27| + |6c + 18| - 37$.

576 Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

- а) $|3x + 9| - |7x + 14| + |2x - 5| > -6$, где $x \in [-4; +\infty)$;
 б) $9 - |5 - 2y| \leq |3y + 21| - |7y - 14|$, где $y \in (-17; 12]$.

577 Переведите в указанные единицы измерения и вычислите:

- а) в килограммы: $1,79 \text{ т} + 123,4 \text{ кг} + 7600 \text{ г} - 0,12 \text{ ц}$; б) в сантиметры: $142,3 \text{ м} + 517 \text{ мм} - 29,7 \text{ см} - 14,3 \text{ дм}$;
 в) в часы: $150 \text{ мин} + 4,5 \text{ суток} - 25 \text{ ч} + 5400 \text{ с}$; г) в рубли: $56,9 \text{ тыс. р.} - 27 \text{ 430 коп.} + 516,9 \text{ р.} - 130 \text{ коп.}$

578 Какие остатки дают натуральные степени числа a при делении на b ?

- а) $a = 2, b = 9$; б) $a = 4, b = 7$; в) $a = 11, b = 5$.

579 а) Два туриста вышли одновременно с двух туристических стоянок навстречу друг другу и встретились через 3 часа. Найдите расстояние между этими туристическими стоянками, если скорости туристов были равны 5 км/ч и 4 км/ч.

б) Из пунктов A и B , находящихся на реке на расстоянии 130 км друг от друга, отплыли одновременно в противоположных направлениях два катера. Скорость первого катера равна 25 км/ч. С какой скоростью плыл второй катер, если через 5 часов расстояние между катерами стало равно 405 км?

в) Увидев нарушителя, милиционер побежал за ним и догнал его через 15 мин. Какое расстояние было между милиционером и нарушителем в тот момент, когда милиционер начал погоню, если скорость милиционера была равна 200 м/мин, а скорость нарушителя - 180 м/мин?

580 Функция задана формулой. Найдите ее область определения.

- а) $y = x^2 - 4$; б) $y = \frac{3}{4x - 5}$; в) $y = \frac{5x + 9}{5x^2}$; г) $y = \frac{3x - 15}{(x + 7)(x - 5)}$;
 б) $y = 6x - 8$; г) $y = \frac{6x + 7}{12}$; е) $y = \frac{3x - 12}{2x - 11}$; з) $y = \frac{8(x - 6)(x + 9)}{x^2(3x + 27)(x - 14)}$.

581 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

- а) $2x + 5y - ((y - 7x) + 7y) - (2x - 6y) - (3x + 9y)$;
 б) $(5a - 3b - (9b - 2a)) + (-3a - (7b + 4a)) - (6a - (8b + 4a)) - (3a - 7b)$;
 в) $2(4p - 3r) - (6t - (5r - 3s)) - (7s - 2(s - 3(t - 5r))) - (7t + 3r - (5t + 9s))$;
 г) $(9mn : 7) : (3nm^3p^2) \cdot (-7mn^3p) \cdot (3pt : 15p^2) : (6mn) : (-mpn^2) \cdot (-5mp^3)$.



Задачи для самоконтроля к Главе 6

- 582** Найдите остаток от деления a на b :
- а) $a = 777^{1111}$, $b = 5$; б) $a = 259^{952}$, $b = 3$; в) $a = 623^{326}$, $b = 11$.

- 583** Найдите три значения x , таких, что:
- а) $x \equiv 5 \pmod{17}$; б) $x \equiv 34 \pmod{51}$; в) $x \equiv 47 \pmod{73}$.

- 584** Функция задана формулой. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно y_1 , y_2 и y_3 .

а) $y = \frac{9}{5-6x}$; $y_1 = 1$; $y_2 = 2$; $y_3 = -2$; б) $y = \frac{3x+12}{6x-2}$; $y_1 = 3$; $y_2 = -2$; $y_3 = 4$.

- 585** Решите неравенство $|bx + 3| \leq a$, где:

$$a = 3\frac{23}{96} - \left(6 : \frac{3}{5} - 1\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{7} - \frac{\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{2} - \frac{1}{15} \right) \cdot \frac{12}{49}}{3\frac{1}{3} + \frac{2}{9}} \right) \cdot 2\frac{1}{3};$$

$$b = \frac{1\frac{9}{16} \cdot 3\frac{1}{5} + 16\frac{2}{3} - 9 : 2\frac{2}{5}}{17\frac{7}{12} - 6\frac{1}{3}} + \frac{12\frac{2}{3} - 61\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4}}{2\frac{2}{3}} - \frac{25}{27}.$$



- 586*** В актовом зале школы несколько рядов. Если пришедшие на спектакль школьники сядут на каждый ряд по 12 человек, то на последний ряд сядет лишь один школьник. Если же школьники сядут на каждый ряд по 11 человек, то двум школьникам места не хватит. Сколько рядов в актовом зале этой школы и сколько школьников пришло на спектакль?

- 587*** Разбейте число 168 на три не равных друг другу натуральных слагаемых так, чтобы сумма любых двух этих слагаемых делилась на третье.

Задачи для самоконтроля к Главе 6

- 588** Решите уравнение:

а) $17x + 14 - 25x = 36 - 15x - 29$; ж) $6p + 3(4p - 5) = 1 + 8(5p + 7) + 2p$;
 б) $30 = 12y - 5y + 4y - 7y - 4y + 30$; з) $4(2q - 6) - 11q = 2(3 - 6q) + 9q$;
 в) $9z + 3,2 + 12z = 27z - 4,8 + 1,4$; и) $4(m + 7) = 28(m - 2)$;
 г) $10t - 27 - 4t + 21 = 8$; к) $12(3n - 14) = 48(9 - 5n)$;
 д) $7,3s + 14,7s = 8,3s - 11,3s$; л) $15(2s + 4) = 30(2 - 9s)$;
 е) $23,2r - 10 = 65 + 29,9r - 6,7r - 43$; м) $14(2r - 6) = 21(r - 4) + 7r$.

- 589** Найдите корни уравнений:

а) $|x - 5| = 7$; д) $|a + 9| = |a - 5|$;
 б) $|y - 9| = -12$; е) $|b + 3| = -|b + 18|$;
 в) $-|7 - 2m| = -9$; ж) $-|3c - 6| = -|7c + 14|$;
 г) $-|-3n - 4 + 11n| = 0$; з) $|9k - 8 - 7k| = |5 - 3k + 4 - 6k|$.

590 Равносильны ли уравнения?

- а) $4 - 8x = 0$ и $9x = 4,5$; в) $3z(z - 2) = 0$ и $z(z - 2) = 0$;
 б) $-6y - 18 = 0$ и $15 - 5y = 0$; г) $t(t + 5) = 0$ и $t + 5 = 0$.

591 Найдите корни уравнения:

- а) $\frac{x}{7} - 2 = 9$; д) $\frac{2s-1}{7} = 3 - \frac{2s-3}{2}$; и) $\frac{3}{p+7} = \frac{1}{4}$;
 б) $\frac{y}{5} = \frac{y}{9} - 2 + \frac{4y}{45}$; е) $\frac{3p-5}{9} = \frac{2p-2}{6} + 1$; к) $\frac{5}{q-2} = \frac{7}{q-4}$;
 в) $\frac{3z-5}{3} = \frac{2z-3\frac{1}{3}}{2}$; ж) $\frac{3q+4}{3} = \frac{5q+6}{5} + \frac{2}{15}$; л) $\frac{m}{m-2} = \frac{2}{m-2}$;
 г) $\frac{6-t}{4} = \frac{12-2t}{5}$; з) $\frac{r-1}{7} + \frac{r-2}{5} - \frac{r-3}{3} = \frac{r+4}{15}$; м) $\frac{n-1}{n+3} = \frac{n+4}{n-2}$.

592 а) В трех седьмых классах, 7 «А», 7 «Б» и 7 «В», учится 76 школьников. Известно, что в 7 «А» школьников на 5 больше, чем в 7 «Б», и на 3 меньше, чем в 7 «В». Сколько школьников учится в каждом из этих классов?

б) В четыре коробки положили 91 пирожное. Известно, что во второй коробке пирожных оказалось в 2 раза больше, чем в первой, и на 2 больше, чем в третьей. А в четвертую коробку положили на 3 пирожных больше, чем в первую. Сколько пирожных в каждой из этих коробок?

в) Частное двух рациональных чисел равно 7, при этом одно из этих чисел на 9 больше другого. Найдите эти числа.

г) Одно из двух загаданных рациональных чисел на 4 больше другого, а сумма их модулей равна 12. Найдите эти числа.

593 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $7a - 19$ равно 9;
 б) значение выражения $11b - 9$ равно значению выражения $5b + 7$;
 в) значение выражения $9c + 21$ противоположно значению выражения $15 - 3c$;
 г) значение выражения $2d + 17$ в 5 раз больше значения выражения $d + 2$;
 д) значение выражения $8 - x$ в 6 раз меньше значения выражения $12x + 18$;
 е) значение выражения $9y - 5$ на 11 меньше значения выражения $2y + 34$;
 ж) значение выражения $3t - 8$ на 8 больше значения выражения $14 - 7t$;
 з) значение выражения $|z - 3|$ равно 5;
 и) значение выражения $|3s - 9|$ равно значению выражения $|5s + 10|$;
 к) значение выражения $|6p + 12|$ на 8 больше значения выражения $|p + 7|$;
 л) значение выражения $|3q - 15|$ на 12 меньше значения выражения $|7q + 21|$.

594 Докажите, что:

- а) уравнение $17x = 17(x + 9)$ не имеет корней;
 б) корнем уравнения $9y - 60 = 12(y - 5) - 3y$ является любое число;
 в) уравнение $|3z| = |3z + 6|$ имеет единственный корень;
 г) уравнение $|t - 3| + 2 = 0$ не имеет корней;
 д) уравнение $|6s - 9| = |6s + 3| - 12$ имеет не менее 10 корней.

595 Решите уравнение:

а) $|x - 5| + |x - 7| = 14$;

ж) $|x + 3| + |x - 5| + |x + 4| = -15$;

б) $-|11 + y| - |y + 19| = 28$;

з) $|y + 2| - |6 - y| = |y + 3| - 8$;

в) $|9 + z| - |2 - z| = -9$;

и) $|z - 2| - |z + 4| + |z - 9| = -5$;

г) $-|6 - 18t| - |2t + 8| = 7$;

к) $|s - 10| = 9 - |s - 3| + |s - 7|$;

д) $4 - |3a - 6| = |4 - a|$;

л) $|5 - q| - |q - 4| = 7$;

е) $|5b - 15| = |15 - 5b|$;

м) $|2b + 6| + |7b - 14| = |5b + 2|$.

596 У Миши есть только консервные банки весом 350 и 420 г. Как ему с их помощью отвесить на чашечных весах за одно взвешивание 9,1 кг гвоздей, используя в общей сложности наименьшее количество банок, если он кладет банки на одну чашу весов.

597 На фабрике по производству соков имеются пакеты вместимостью 0,8 и 1,2 л. Сок разливают в пакеты так, чтобы все пакеты оказались полными.

а) Можно ли разлить в эти пакеты 9,8 л?

б) Какое количество и каких пакетов надо приготовить, чтобы разлить 76 л сока так, чтобы количество всех пакетов было минимальным?

598 На станцию привезли 542 тонны бензина в цистернах вместимостью 18 т и 20 т. Все цистерны были полностью загружены. Могло ли получиться так, что цистерн в сумме было:

а) 26; б) 28; в) 30; г) 32?

599 Равносильны ли неравенство:

а) $x - 7 < 9$ и $x < 16$;

в) $2c - 9 > 17$ и $-c < 13$;

б) $y + 2 > 12$ и $y + 1 > 15$;

г) $5 - 9b < 14$ и $3b - 2 > -1$?

600 Решите неравенства:

а) $9x < -12$;

д) $-8a - 7 \leq -6a + 17$;

и) $11c + 5 - 19c \geq 37 - 8c - 9$;

б) $5y > 8,5$;

е) $5b - 2 + b > -7 + 6b$;

к) $8d - 15 + 11d < -5d + 10 - d$;

в) $\frac{7}{8} \leq -2z + 1$;

ж) $7(4 - 11m) \geq -56(2 + m)$;

л) $9p + 3(4p - 5) \leq 6(3p + 1) + 3p$;

г) $1,2k + 1 \geq -3$;

з) $-5,2(7 - 2n) > -1,3(7n + 4)$;

м) $2,8q - 0,6(8 - q) < 0,5 - 2,3(-2q + 3)$.

601 Найдите множество решений неравенства:

а) $\frac{x}{5} + 7 > 9$; в) $\frac{z}{3} + 2 < \frac{2z}{7} - 1$; д) $\frac{5a - 7}{3} > \frac{2a + 9}{5}$; ж) $\frac{2c + 8}{-3} \geq \frac{7 - 3c}{-12}$;

б) $-\frac{y}{3} + 7 \leq -2$; г) $-\frac{m}{4} - 1 \geq 2 - \frac{m}{3}$; е) $\frac{3 - 4b}{-4} \leq \frac{7b - 9}{7}$; з) $\frac{2d - 7}{3} - 3 < \frac{4d + 5}{6} - 2$.

602 Докажите, что неравенство верно при всех значениях переменной:

а) $7(x + 2) - 3x + 10 > 5 - 2(x - 8) + 6x$;

в) $|a + 12| \geq -43$;

б) $10 - 5(y - 3) - 6y + 7 \leq 1 - 7(y - 8) - 4y$;

г) $-|b - 34| < 5$.

603 Докажите, что данное неравенство не имеет решений:

- а) $6(x + 2) + 8(x + 1) \leq 14(x + 1)$; в) $|a - 26| < -32$;
б) $9(2y + 7) + 4(y - 5) - 11(2y + 4) > 0$; г) $-|b + 14| \geq 18$.

604 Решите неравенство с модулем:

- а) $|x + 2| < 7$; ж) $|k + 8| < |k - 4|$;
б) $|y - 5| > 6$; з) $|5m - 25| \geq |-7m - 21|$;
в) $-|3z - 9| \leq 42$; и) $-|3n + 21| \leq |9n + 5 - 12n + 7|$;
г) $-|6a + 7| \geq -5$; к) $|6p - 18| + |3p + 27| > 36$;
д) $|9b + 11 - 3b| < -1$; л) $|x + 12| + |x - 7| < |x + 9| + 14$;
е) $|-4c + 7 - 5c - 4| \geq 3$; м) $13 + |7y - 14| - 9 - |3y + 12| \geq |5 - 2y|$.

605 При каких значениях переменной:

- а) значение выражения $7a - 3$ больше 4;
б) значение выражения $9 - 4b$ меньше или равно (-6) ;
в) значение выражения $5c - 12$ больше или равно значению выражения $7c + 4$;
г) разность значений выражений $5d + 7$ и $6 - d$ меньше 5;
д) удвоенное значение выражения $3 - 2x$ не меньше значения выражения $3x - 1$;
е) утроенное значение выражения $y - 7$ не больше значения выражения $6y + 15$;
ж) сумма значений выражений $\frac{2z - 3}{-3}$ и $\frac{5 + z}{4}$ отрицательна;
з) разность значения выражения $|a + 12|$ и числа 7 положительна;
и) сумма значения выражения $|19 - 6b|$ и числа (-1) неположительна;
к) разность значений выражений $|3c - 8|$ и $|c + 6|$ неотрицательна;
л) сумма значений выражений $|4x - 17|$ и $|-x - 11|$ меньше (-30) ;
м) произведение значений выражений $|y - 6|$ и $|2y + 21|$ больше или равно (-12) .

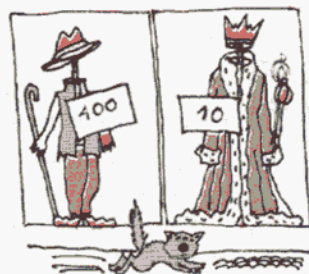
606 а) Длина одной стороны прямоугольника на 12 см больше длины другой. Какой может быть длина этой стороны, если периметр этого прямоугольника меньше 60 см?

б) Оплата за Интернет включает в себя месячную абонентскую плату и плату за каждый скачанный мегабайт. Месячная абонентская плата равна 250 р., а плата за 1 мегабайт равна 17 коп. Какое количество мегабайт можно будет скачать в течение месяца, чтобы плата за Интернет не превысила 319 р.?

607 а) На катке дают напрокат коньки и клюшки. Известно, что разность между количеством клюшек и 20% количества коньков равна 60% от суммы количества коньков и 20% количества клюшек. Чего на катке больше – коньков или клюшек, и во сколько раз?

б) Как изменилась цена товара, если сначала ее увеличили на 40%, затем уменьшили на 20%, а затем еще раз уменьшили на 25%?

в) Один из множителей увеличили на 10%, а другой уменьшили на 10%. Как изменилось произведение?



608 а) Два переводчика получили заказ на перевод. Первый переводчик может выполнить этот заказ за 5 рабочих дней, а второй может выполнить 40% заказа за 6 рабочих дней. Сколько рабочих дней потребуется этим двум переводчикам для выполнения всего заказа, если они будут работать вместе с указанной производительностью?

б) Для наполнения бассейна используются три трубы. Через первую трубу пустой бассейн наполняется за 32 часа, через вторую – за 24 часа, а через третью – за 48 часов. За какое минимальное время можно наполнить этот бассейн?

в) Из пунктов А и В, находящихся на расстоянии 25 км друг от друга, выехали одновременно в противоположных направлениях два велосипедиста. Скорость первого велосипедиста равна 20 км/ч. С какой скоростью ехал второй велосипедист, если через 3 часа расстояние между ними стало равно 130 км?

г) Таня, увидев, что ее подруга Наташа идет по направлению к кинотеатру, побежала за ней и через 5 мин догнала ее. Какое расстояние было между Таней и Наташей в тот момент, когда Таня пустилась вдогонку, если скорость Тани была равна 120 м/мин, а скорость Наташи – 50 м/мин?

609 Решите уравнение:

а) $\left(x + \frac{2x}{5}\right) \cdot \frac{5}{3} + \left(x + \frac{4x}{5}\right) \cdot \frac{5}{9} \cdot 11 = 22$; б) $3 - \frac{y - \frac{2+y}{4}}{3} = \frac{y}{12} - \frac{3y - \frac{5-4y}{3}}{4}$;

в) $|z + 5| + |z - 6| + |z + 4| + |z - 7| = 8$;

г) $|3k + 9| - |2k - 8| + |5k + 10| + |6k - 12| = 19$.

610 Найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению:

а) $x + a = 5$; б) $4x + 2b = 11$; в) $2x = \frac{x}{a} + b$; г) $3x - 2b = \frac{x}{c}$.

611 Решите неравенство:

а) $3x - \frac{6x}{7} + 12 > \frac{3x}{4} + 7 - \frac{9x}{14} + \frac{5x}{2} - \frac{3}{28}$; б) $5y + 2 - \frac{4y - \frac{7-8y}{3}}{7} < \frac{2y - \frac{4y+1}{7}}{3}$;

в) $|z + 6| + |z - 9| + |z + 4| + |z - 8| < 33$;

г) $|k + 1| - 4 \geq |k - 11| - |k + 8| + |k + 6|$.

612 Найдите все решения неравенства, принадлежащие указанному промежутку:

а) $9 + \frac{2x}{5} > \frac{3x}{7} + 12$; $x \in (-28; +\infty)$; б) $5 + 7y - \frac{4y}{3} < \frac{9y}{4} - 2y$; $y \in [-37; 49]$;

в) $|3z + 12| - |2z + 18| + |7z - 14| < 12$, где $z \in (-\infty; 3]$;

г) $-|7 - 4k| > |5k + 15| - |2k - 14| - 18$, где $k \in [-18; 2)$.

613 а) Целое число дает при делении на 7 остаток 2, а при делении на 9 – остаток 3. Найдите остаток от деления этого числа на 63.

б) Найдите все числа, которые при делении на 8 дают остаток 5, а при делении на 5 дают остаток 2.

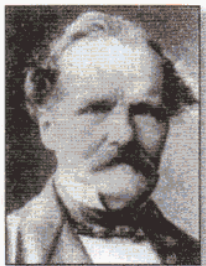
614 Числа m , n , $\frac{41}{2m + 5n}$ – натуральные. Найдите все пары чисел m и n , для которых это будет верно.

Глава 7

Введение в комбинаторику, теорию вероятностей и статистику

§ 1. Элементы комбинаторики

1. Задача подсчета числа вариантов



Необычайная красота господствует в царстве математики, красота, подобная не столько красоте искусства, сколько красоте природы...

Эрнст Эдуард Куммер (1810–1893),
немецкий математик

На практике нам часто бывает нужно решать задачи, связанные с перебором вариантов. При этом возникает необходимость среди всех возможных комбинаций выбрать оптимальную по некоторым заданным признакам. Например, играя в шашки, шахматы или какую-нибудь компьютерную игру, требуется выбирать ходы, ведущие к выигрышу.

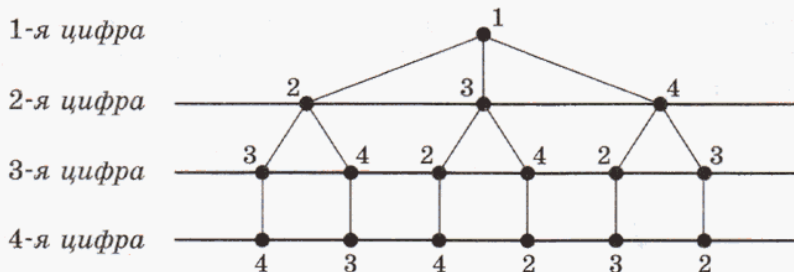
Область математики, которая изучает общие законы комбинирования различных объектов – их перестановки, сочетания, размещения, – называется *комбинаторикой*. В частности, комбинаторика ищет методы решения задач, в которых надо найти число всех возможных вариантов выбора объектов с заданными свойствами. При этом речь, как правило, идет о конечных множествах элементов.

Рассмотрим, например, следующую задачу подсчета числа возможных вариантов.

Задача 1. Сколько различных паролей, состоящих из четырех различных цифр, можно составить, если в пароле могут быть использованы только цифры 1, 2, 3, 4?

Решение:

Рассмотрим сначала случай, когда на первом месте нашего пароля стоит цифра 1, и составим для этого случая дерево возможностей.



Из схемы ясно видно, что в этом случае на втором месте могут стоять только цифры 2, 3 и 4. Если на втором месте стоит цифра 2, то на третьем месте могут стоять только цифры 3 и 4, а на четвертом, соответственно, цифры 4 и 3. Аналогично

по два варианта получается, если на втором месте стоят цифра 3 и цифра 4. Таким образом, общее число возможных вариантов в случае, когда на первом месте стоит цифра 1, равно шести:

1234	1324	1423
1243	1342	1432

Поскольку, согласно условию задачи, никаких ограничений на способ расположения цифр в пароле не наложено, то каждая из цифр 1, 2, 3 и 4 может стоять на любом месте пароля. Следовательно, мы также получим по шесть различных паролей и в случаях, когда на первом месте будут стоять цифры 2, 3 или 4.

Итак, общее число возможных паролей равно $6 \cdot 4 = 24$.

Ответ: всего можно составить 24 различных пароля.

При решении задачи 1 мы, подсчитывая количество возможных паролей из различных символов, использовали *метод систематического перебора*, который для задач данного типа состоит в следующем.

Метод систематического перебора

(подсчет числа комбинаций из различных символов)

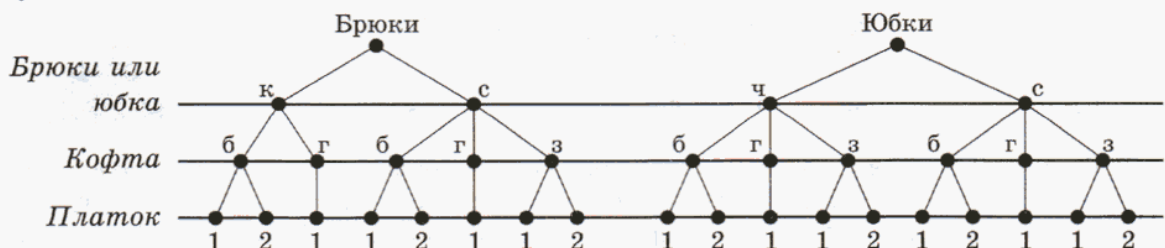
1. Закрепить на первом месте комбинации один из символов, принадлежащих множеству заданных в задаче символов.
2. Для выделенного случая вычислить число возможных вариантов, используя дерево возможностей, таблицу и др.
3. Если по условию задачи каждый из символов может занимать любую позицию, то общее количество возможных вариантов равно произведению полученного числа на количество заданных символов.
4. Если на символы наложены какие-либо ограничения, то надо вычислить количество возможных вариантов отдельно для всех символов с различными свойствами, а затем сложить полученные числа.

Рассмотрим теперь, как с помощью метода систематического перебора можно решить задачу, в которой на заданные символы наложены некоторые ограничения.

Задача 2. В гардеробе у Маши есть красные и синие брюки, черная и синяя юбка, а также белая, голубая и зеленая кофты. Еще у Маши есть два платка – шелковый и шерстяной. Сколько различных нарядов, состоящих из юбки, кофты и платка либо из брюк, кофты и платка, сможет составить Маша из этих вещей, если зеленая кофта не подходит под красные брюки, а шерстяной платок – под голубую кофту?

Решение:

Составим дерево возможностей, обозначая цвета вещей первыми буквами соответствующих слов, а шелковый и шерстяной платки соответственно цифрами 1 и 2. При этом учтем те ограничения на составление комплектов одежды, которые заданы в условии задачи.



Количество вариантов равно количеству точек в последней строке. Значит, получилось 8 различных вариантов с брюками и 10 с юбками, а всего – 18 комплектов.

Ответ: Маша может составить из своих вещей всего 18 различных нарядов.

Задача 2. Расположите числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 в клетках квадрата размером 3×3 так, чтобы квадрат стал магическим. Сколько таких квадратов можно составить?

Решение:

Напомним, что квадрат называют магическим, если сумма чисел, стоящих в его клетках по столбцам, строкам и диагоналям, одинаковая.

Заметим, что магический квадрат можно составить далеко не из любых девяти чисел, поэтому совершенно не очевидно, что данная задача имеет решение.

Чтобы выяснить, можно ли составить из указанных чисел магический квадрат, установим ограничения, которые накладывает на данные числа это условие.

Прежде всего, вычислим, какой должна быть сумма чисел в каждой строке, столбце и диагонали искомого магического квадрата. Для этого найдем сумму всех данных чисел и разделим ее на количество столбцов (строк) в квадрате, то есть на 3:

$$(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) : 3 = 36 : 3 = 12$$

Следовательно, сумма чисел в каждой строке, столбце и диагонали нашего магического квадрата должна быть равна 12. Значит, первое ограничение состоит в том, что нам надо выбрать из данных чисел группы по три слагаемых, сумма которых равна 12. Методом перебора устанавливаем все такие комбинации (с точностью до порядка слагаемых):

$$\begin{array}{llll} 0 + 4 + 8 = 12 & 1 + 3 + 8 = 12 & 2 + 3 + 7 = 12 & 3 + 4 + 5 = 12 \\ 0 + 5 + 7 = 12 & 1 + 4 + 7 = 12 & 2 + 4 + 6 = 12 & \\ & 1 + 5 + 6 = 12 & & \end{array}$$

Таким образом, выбрать из указанных чисел группы по три слагаемых, сумма которых равна 12, можно лишь указанными 8 способами.

Второе ограничение состоит в том, что число строк квадрата 3×3 равно трем, столбцов – трем, а диагоналей – двум. Значит, всего в указанном квадрате должны быть равными $3 + 3 + 2 = 8$ сумм. Так как мы имеем всего 8 комбинаций чисел, сумма которых равна 12, то, следовательно, каждая из них должна занять в искомом магическом квадрате ровно одну позицию – строку, столбец или диагональ.

И наконец, необходимо учесть, что в магическом квадрате числа должны встречаться в определенном числе комбинаций. Ведь числа в квадрате расположены на пересечении строк, столбцов и диагоналей (рис. 15).

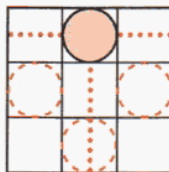
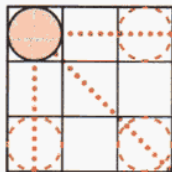
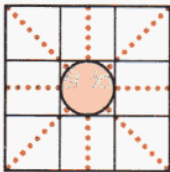


Рис. 15



Так, число, стоящее в середине магического квадрата, должно встречаться в четырех комбинациях, в углах квадрата – в трех комбинациях, а остальные числа – в двух комбинациях.

Подсчитаем частоту появления чисел в наших комбинациях:

Число	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Частота появления в комбинациях	2	3	2	3	4	3	2	3	2

Из таблицы видно, что в центре магического квадрата может находиться только число 4, а в углах – числа 1, 3, 5, 7. И так как сумма чисел, расположенных в каждой из диагоналей, должна быть равна 12, то на диагоналях могут стоять лишь две комбинации:

$$1 + 4 + 7 = 12$$

$$3 + 4 + 5 = 12$$

Поэтому на диагоналях квадрата могут располагаться лишь числа 1, 4, 7 и 3, 4, 5. Таким образом, мы получаем следующие восемь возможных расположений центрального и угловых элементов в магических квадратах:

1		3	1		5	7		3	7		5
	4			4			4			4	
5		7	3		7	5		1	3		1
3		1	5		1	3		7	5		7
	4			4			4			4	
7		5	1		3	7		5	1		3

Поскольку сумма чисел в каждой строке и столбце равна 12, то расположение остальных чисел определяется однозначно. Так, в первом квадрате в верхней строке следует поставить число $12 - (1 + 3) = 8$, в нижней – число $12 - (5 + 7) = 0$, в левом столбце – число $12 - (1 + 5) = 6$, а в правом – число $12 - (3 + 7) = 2$. При этом получается, что сумма чисел средней строки и среднего столбца также оказывается равной 12:

$$8 + 4 + 0 = 12$$

$$6 + 4 + 2 = 12$$

Поистине «необычайная красота господствует в царстве математики».

Аналогичным образом можно заполнить клетки и всех остальных квадратов:

1	8	3	1	6	5	7	2	3	7	0	5
6	4	2	8	4	0	0	4	8	2	4	6
5	0	7	3	2	7	5	6	1	3	8	1
3	8	1	5	6	1	3	2	7	5	0	7
2	4	6	0	4	8	8	4	0	6	4	2
7	0	5	7	2	3	1	6	5	1	8	3

Ответ: из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 можно составить 8 магических квадратов размером 3×3 .

К

615

а) Флаг составлен из трех одинаковых горизонтальных полос разного цвета: красного, белого и синего. Сколько различных флагов удовлетворяют этому условию?

б) По дороге домой Боря встретил по очереди трех своих друзей – Ваню, Колю и Мишу. Сколькими способами он мог это сделать?

в) Сколько различных трехзначных чисел, цифры в которых не повторяются, можно составить из цифр 5, 4, 8?

- 616** а) В обувном магазине продается 12 моделей зимних сапог и 5 моделей туфель. Сколькими способами можно купить в этом магазине одну пару сапог и одну пару туфель, если имеются все нужные размеры?
 б) В почтовом отделении продается 15 видов открыток и 9 видов конвертов. Сколькими способами можно в этом почтовом отделении купить одну открытку и один конверт?
 в) У Наташи имеются красный, синий, желтый, оранжевый, фиолетовый и зеленый шары. Сколькими способами она может выложить все эти шары в ряд?
 г) Пятеро друзей купили билеты в кинотеатр. Сколькими способами они смогут в этом кинотеатре разместиться на своих местах?
- 617** а) В некоторой стране всего четыре города: A , B , C и D . Есть 7 дорог из города A в город B , 9 дорог из города B в город C и 5 дорог из города C в D . Дорог из A в D нет. Сколькими способами можно добраться из города A в город D ?
 б) В меню ресторана 6 видов первых блюд, 14 видов вторых блюд и 8 десертов. Сколькими способами можно заказать в этом ресторане обед из первого, второго блюда и десерта?
 в) Сколькими способами можно выбрать из 15 книг по истории, 12 книг по математике и 9 книг по биологии три книги: одну по истории, одну по математике и одну по биологии?
 г) Сколько различных восьмизначных паролей из цифр 5, 6, 7 и 8 и букв A , B , C , D можно составить, если цифры и буквы в пароле не должны повторяться?
- 618** а) В седьмом классе одной из школ в расписании занятий в понедельник должны быть следующие предметы: алгебра, русский язык, история, физика, география. Учитель математики попросил составителя расписания, чтобы его урок алгебры был первым или вторым. Учитель физики высказал пожелание, чтобы его урок был вторым или третьим. Учитель географии попросил, чтобы его урок был первым или четвертым. Учителя истории и русского языка не высказали никаких пожеланий. Сколькими способами и как можно составить расписание, удовлетворив все просьбы учителей и заняв уроки с первого по пятый?
 б) Сколькими способами можно разместить в одном ряду двух мальчиков и трех девочек так, чтобы все девочки сидели рядом?
 в) В автомобиле семь мест. Сколькими способами могут разместиться в этой машине семь человек, если за руль могут сесть только трое из них?
 г) Сколько пятизначных чисел, делящихся на 2, можно составить из цифр 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в искомом числе не повторяются?
 д) Сколькими способами можно поставить на книжной полке собрание сочинений из 5 томов, чтобы тома 2 и 3 стояли рядом?
- 619** а) Расположите числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в клетках квадрата размером 3×3 так, чтобы квадрат стал магическим. Сколько таких квадратов можно составить?
 б) Расположите числа 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 в клетках квадрата размером 3×3 так, чтобы квадрат стал магическим. Сколько таких квадратов можно составить?
 в) Расположите числа 1, 7, 13, 31, 37, 43, 61, 67, 73 в клетках квадрата размером 3×3 так, чтобы квадрат стал магическим. Сколько таких квадратов можно составить?

- 620** а) Учащиеся седьмого класса изучают 8 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы в этот день было 6 различных уроков?
 б) Сколькими способами можно раскрасить флаг, состоящий из трех одинаковых горизонтальных полос различного цвета, если имеются краски 5 цветов?
 в) Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры не могут повторяться?

П

621 Сформулируйте утверждения, обратные к данным, и определите истинность прямых и обратных утверждений. Найдите равносильные высказывания. Приведите два своих примера равносильных высказываний.

- а) Если каждое из двух целых чисел делится на некоторое целое число, то и их сумма делится на это число.
 б) Если произведение двух целых чисел делится на некоторое целое число, то хотя бы один из множителей делится на это число.
 в) Если целое число a кратно 3, то число $12a$ кратно 3.
 г) Если a — целое число и $5a$ кратно 7, то число a кратно 7.
 д) Если целое число a кратно 2 и целое число b кратно 6, то число $3a + b$ кратно 6.
 е) Если целое число a кратно 7 и целое число b кратно 14, то число $2ab$ кратно 14.
 ж) Если целое число a делится на 3, то число $a(a + 1)$ делится на 6.
 з) Если целое число a делится на 4, то число $a(a + 2)$ делится на 8.

622 Сравните числа:

- а) $\frac{27}{31}$ и $\frac{108}{121}$; в) $\frac{156}{157}$ и $\frac{155}{156}$; д) $\frac{149}{300}$ и $\frac{153}{301}$; ж) $\frac{45}{97}$ и $\frac{453}{973}$;
 б) $\frac{15}{17}$ и $\frac{137}{153}$; г) $\frac{934}{935}$ и $\frac{935}{936}$; е) $\frac{183}{363}$ и $\frac{193}{387}$; з) $\frac{67}{73}$ и $\frac{677}{737}$.

623 Известно, что остаток от деления числа A на 23 равен a , а числа B на 23 — равен b . Найдите остаток от деления на 23 числа: 1) $A + B$; 2) $A - B$; 3) $A \cdot B$, если:

- а) $a = 4, b = 8$; в) $a = 7, b = 9$; д) $a = 15, b = 18$;
 б) $a = 6, b = 5$; г) $a = 11, b = 8$; е) $a = 21, b = 17$.

624 На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

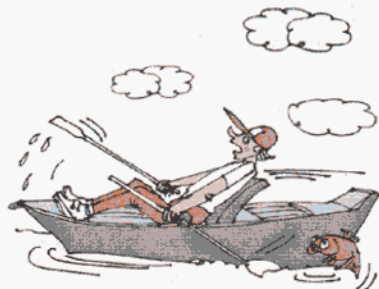
- а) $x + 1 > 7, y - 3 \leq -5$; в) $-3 \leq 4x + 9 < 1; -14 \leq 5y - 4 \leq 6$;
 б) $2x + 3 \leq 9, 3y - 5 > 4$; г) $-13 < 2x - 11 \leq -7; 2 \leq 7y + 16 \leq 23$.

625 а) Двигаясь по реке, катер прошел расстояние от города A до города B за 5 часов, а на обратный путь ему потребовалось 7 часов. Найдите собственную скорость движения катера, если скорость течения реки равнялась 2 км/ч. Найдите с точностью до десятых среднюю скорость движения катера.

б) Расстояние от Астрахани до Санкт-Петербурга по водному пути составляет 3600 км. За сколько времени проплывет теплоход путь от Астрахани до Санкт-Петербурга и обратно, если собственная скорость теплохода будет равна 27 км/ч, скорость течения реки равна 3 км/ч, а остановки составят 10% от всего времени движения?

в) Плот плывет по течению реки. Его догоняет лодка. Собственная скорость лодки равна 6 км/ч. Через какое время лодка догонит плот, если в данный момент расстояние между ними 18 км?

г) Две яхты плывут по реке навстречу друг другу. Собственная скорость первой яхты равна 25 км/ч, а второй – 30 км/ч. Через какое время они встретятся, если в данный момент расстояние между ними 220 км?



626 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

- а) $\frac{64a^2 - 25b^2}{8a + 5b}$; г) $\frac{4p^2 - 121q^2}{4p^2 + 44pq + 121q^2}$; ж) $\frac{x + 3y}{x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3}$;
 б) $\frac{16x^2 - 72xy + 81y^2}{4x - 9y}$; д) $\frac{16p^2 - 9q^2}{64p^3 + 27q^3}$; з) $\frac{64a^3 - 48a^2 + 12a - 1}{16a^2 - 8a + 1}$;
 в) $\frac{18zt - 21t^2}{-84zt + 36z^2 + 49t^2}$; е) $\frac{27a^3 - 8b^3}{9a^2 - 12ab + 4b^2}$; и) $\frac{c^3 + 15c^2d + 75cd^2 + 125d^3}{c^2 - 25d^2}$.

627 Найдите наименьшее натуральное x , такое, что:

- а) $3x \equiv 2 \pmod{4}$; б) $2x \equiv 3 \pmod{5}$; в) $5x \equiv 3 \pmod{6}$; г) $6x \equiv 1 \pmod{7}$.

628 На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенству:

- а) $y < x + 4$; б) $y > x - 5$; в) $y \leq 2x + 4$; г) $y \geq 3x - 6$.

629 а) Яхта плывет из пункта A в пункт B в течение шести часов, а обратно – в течение четырех часов. Сколько времени будет плыть плот из B в A ?

б) Из города A против течения реки вышел теплоход с постоянной собственной скоростью, равной 25 км/ч. Через некоторое время из города B по течению реки вышла яхта и встретила теплоход, пройдя половину расстояния, которое было между теплоходом и яхтой после начала движения яхты. Чему была равна собственная скорость яхты, если скорость течения реки 3 км/ч?

2

630 а) В магазине спортивных товаров продается 8 видов теннисных ракеток и 5 различных наборов теннисных мячей. Сколькими способами можно купить в этом магазине ракетку и набор теннисных мячей?

б) У Коли есть синий, зеленый, оранжевый и фиолетовый мячи. Сколькими способами он может выложить их в ряд?

631 а) Между городами B и A имеется 6 дорог, а между городами A и C – 9 дорог. Сколькими способами можно добраться из города B в город C через город A ?

б) В меню школьной столовой 4 вида салатов, 3 вида первых блюд и 7 видов вторых блюд. Сколькими способами можно купить в школьной столовой обед из салата, первого и второго блюда?

в) Сколько различных шестизначных паролей из цифр 2 и 7 и букв A, B, C, D можно составить, если цифры и буквы в пароле не должны повторяться?

632 а) В седьмом классе одной из школ в расписании занятий одного дня должны быть следующие предметы: геометрия, литература, информатика, физкультура, биология. Учитель физкультуры попросил составителя расписания, чтобы его урок был четвертым или пятым. Учитель биологии высказал пожелание, чтобы его урок был третьим или четвертым. Учитель информатики попросил, чтобы его урок был третьим или пятым. Остальные учителя не высказали никаких пожеланий. Сколькими способами и как можно составить расписание, удовлетворив все просьбы учителей и заняв уроки с первого по пятый?

б) Сколькими способами можно разместить в одном ряду шесть мальчиков и двух девочек так, чтобы все мальчики сидели рядом?

в) Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 3, 5, 6, 8, если цифры в искомом числе не повторяются?

633 а) Расположите числа 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 в клетках квадрата размером 3×3 так, чтобы квадрат стал магическим. Сколько таких квадратов можно составить?

б) Расположите числа 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 в клетках квадрата размером 3×3 так, чтобы квадрат стал магическим. Сколько таких квадратов можно составить?

634 а) Сколькими способами можно раскрасить квадрат, состоящий из четырех одинаковых клеток различного цвета, если имеется 5 красок?

б) Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 5, 6, 8, 9, если цифры не могут повторяться?

635 Сравните числа:

а) $\frac{41}{83}$ и $\frac{59}{117}$; б) $\frac{259}{260}$ и $\frac{260}{261}$; в) $\frac{17}{23}$ и $\frac{153}{206}$; г) $\frac{37}{89}$ и $\frac{379}{899}$.

636 Известно, что остаток от деления числа A на 13 равен a , а числа B на 13 – равен b . Найдите остаток от деления на 13 числа: 1) $A + B$; 2) $A - B$; 3) $A \cdot B$, если:

а) $a = 2, b = 7$; б) $a = 5, b = 6$; в) $a = 11, b = 9$.

637 На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $x + 2 > 9, y - 8 \leq -3$; в) $-4 \leq 3x + 2 < 5; -7 \leq 2y - 11 \leq 3$;
б) $2x + 7 \geq 3, 4y - 7 > 1$; г) $-24 < 5x - 9 \leq -4; -3 \leq 4y + 13 \leq 1$.

638 а) Теплоход при движении по реке прошел расстояние от города A до города B за 12 часов. На обратный путь ему потребовалось 15 часов. Найдите собственную скорость движения теплохода, если скорость течения реки равнялась 2 км/ч. Найдите с точностью до сотых среднюю скорость движения теплохода.

б) Расстояние от Самары до Волгограда по водному пути составляет 1890 км. За сколько времени проплывет теплоход путь от Самары до Волгограда и обратно, если собственная скорость теплохода будет равна 24 км/ч, средняя скорость течения реки составит 3 км/ч, а остановки составят 20% от всего времени движения?



639 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{36a^2 - 16b^2}{6a - 4b}$; в) $\frac{25p^2 - 49q^2}{25p^2 - 70pq + 49q^2}$; д) $\frac{5x + y}{125x^2 + 75x^2y + 15xy^2 + y^3}$;
 б) $\frac{64x^2 + 48xy + 9y^2}{8x + 3y}$; г) $\frac{27p^3 + 64q^3}{9p^2 - 16q^2}$; е) $\frac{8a^3 - 12a^2 + 6a - 1}{4a^2 - 4a + 1}$.

640 Найдите наименьшее натуральное x , такое, что:

а) $2x \equiv 1 \pmod{3}$; б) $3x \equiv 1 \pmod{4}$; в) $3x \equiv 2 \pmod{5}$; г) $2x \equiv 3 \pmod{7}$.

641 На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенству:

а) $y < x + 2$; б) $y > x - 3$; в) $y \leq 4x + 8$; г) $y \geq 5x - 10$.

642 Решите уравнение $|ax + b| = c$:

$$a = \left(5\frac{3}{8} + 18\frac{1}{2} - 7\frac{5}{24}\right) : 16\frac{2}{3}; \quad c = \frac{28\frac{4}{5} : 13\frac{5}{7} + 6\frac{3}{5} : \frac{2}{3}}{1\frac{11}{16} : 2\frac{1}{4}};$$

$$b = \left(12\frac{5}{12} + 1\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6} + 2\frac{3}{4}\right) : \left(2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{7}{9}\right).$$



643* Баскетбольный матч российской суперлиги между ЦСКА и «Динамо» (Москва) окончился победой ЦСКА со счетом 77 : 53. В этом матче был момент, когда ЦСКА уже забросил столько мячей, сколько «Динамо» (Москва) забросил после этого момента. Сколько мячей к этому моменту было в сумме заброшено обеими командами?

644* Сумму двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 2517?

2. Комбинации с повторениями



В математике, как и в других науках, не растеряться перед лицом удивительности некоторых доказательств часто значит не менее чем половина нового открытия.

Иоганн Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859),
немецкий математик

В предыдущем пункте мы подсчитывали количество возможных вариантов в случаях, когда элементы в искомых комбинациях не повторялись. Так, цифры искомого пароля должны были быть различными, числа в магическом квадрате не повторялись, а комплекты одежды Маши не могли содержать одновременно, например, две кофты.

Теперь мы рассмотрим способы решения задач на вычисление количества комбинаций, в которых возможны повторения элементов. Решим, например, следующую задачу.

Задача 1. Сколько существует паролей, состоящих из четырех цифр, в которых не используются цифры 1 и 3?

Решение:

Согласно условию задачи, подсчитывая количество возможных паролей, мы должны учитывать и те пароли, в которых цифры будут повторяться.

Для того чтобы ответить на вопрос задачи, выпишем сначала все возможные пароли, состоящие из *одной* цифры и не содержащие цифр 1 и 3. Таких паролей всего восемь, а именно:

0 2 4 5 6 7 8 9.

Все пароли из двух цифр, не содержащие цифр 1 и 3, можно получить из указанных однозначных, если перед каждым из них мы напишем одну из цифр 0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9. В итоге мы получим следующие двузначные пароли:

00	02	04	05	06	07	08	09
20	22	24	25	26	27	28	29
40	42	44	45	46	47	48	49
50	52	54	55	56	57	58	59
60	62	64	65	66	67	68	69
70	72	74	75	76	77	78	79
80	82	84	85	86	87	88	89
90	92	94	95	96	97	98	99.

А значит, искомым двузначных паролей $8 \cdot 8 = 8^2$.

Действуя далее таким же способом, припишем слева к каждому из указанных двузначных паролей одну из цифр 0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Тем самым нами будет получено $8^2 \cdot 8 = 8^3$ трехзначных паролей.

Аналогично мы получаем, что количество паролей, состоящих из четырех цифр, в которых не используются цифры 1 и 3, равно $8^4 = 64 \cdot 64 = 4096$.

Ответ: всего имеется 4096 паролей из четырех цифр, если цифры 1 и 3 в паролях не используются.

Заметим, что в процессе нашего решения нам было не важно, какие именно из цифр в четырехзначном цифровом пароле не должны быть использованы. Поэтому мы можем сделать вывод о том, что если в цифровом пароле не используются какие-то две из десяти цифр, то количество таких четырехзначных паролей будет равно 4096.

Способ подсчета вариантов, использованный в задаче 1, состоит в следующем.

Способ подсчета числа комбинаций с повторениями

Сначала мы считаем количество комбинаций, содержащих один символ (то есть комбинаций длиной 1). Затем, приписывая последовательно перед каждой полученной комбинацией по одному из возможных символов, мы вычисляем число комбинаций, состоящих из двух символов. Далее, аналогично рассуждая, проводим вычисления до того момента, пока не получим количество комбинаций требуемой длины.

Используя данный способ подсчета вариантов в комбинациях с повторениями, решим следующую задачу.

Задача 2. При кодировании информации используется только два символа – $\diamond$ и $*$. При этом правило кодирования таково: каждой букве алфавита ставится в соответствие некоторая комбинация из данных символов, длиной от одного до четырех символов. Можно ли с помощью указанных комбинаций зашифровать все буквы русского алфавита?

Решение:

Вычислим количество комбинаций длиной от одного до четырех символов, которые можно составить из данных символов. Так как букв русского алфавита 33, то если полученное количество будет больше или равно 33, то буквы русского алфавита можно будет зашифровать с помощью таких комбинаций. В противном случае это сделать будет невозможно.

Из данных символов могут быть составлены лишь 2 различные комбинации длиной в один символ: $\diamond$ и $*$.

Комбинации длиной в два символа можно получить, приписывая $\diamond$ и $*$ перед комбинациями длиной в один символ. Получим следующие возможные комбинации длиной два:

$\diamond\diamond \quad \diamond*$
 $*\diamond \quad **$

Таким образом, число комбинаций длиной два равно $2 \cdot 2 = 2^2$.

Аналогичным образом получаем, что число комбинаций длиной в три символа равно $2^2 \cdot 2 = 2^3$, а число комбинаций длиной в четыре символа равно $2^3 \cdot 2 = 2^4$.

Значит, общее число возможных комбинаций длиной от одного до четырех символов равно:

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$$

Число букв русского алфавита равно 33. Значит, комбинаций из символов $\diamond$ и $*$ длиной от одного до четырех символов не хватит для того, чтобы зашифровать все буквы русского алфавита.

Ответ: зашифровать все буквы русского алфавита с помощью указанных комбинаций невозможно.

К

645

а) Сколько различных четырехзначных паролей можно составить из цифр 6, 7, 8, 9, если цифры в пароле не повторяются?

б) Сколькими способами можно выложить в ряд четыре кубика красного, синего, черного и зеленого цвета?

в) Сколькими способами четыре человека могут разместиться на четырех местах?

646

а) Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых встречаются только цифры 1, 2, 3, 5, 7, 9?

б) Алфавит туземного племени состоит из букв П, Л, К, М. Словом в этом языке является любая последовательность из шести букв. Сколько слов в языке этого туземного племени?

в) Каждая клетка квадратной доски размером 3×3 клетки может быть покрашена в синий или белый цвет. Сколько различных досок, раскрашенных указанным образом, может быть получено?

г) Монету подбрасывают шесть раз подряд и каждый раз записывают, что выпало – «орел» или «решка». Сколько различных последовательностей «орлов» и «решек» можно получить в результате такого подбрасывания?

647

а) Аборигены некоторого острова используют для записи чисел только цифры 2, 4, 6 и 8. Числом является любая последовательность, состоящая не более чем из пяти цифр. Сколько всего чисел у аборигенов этого острова?

б) Какое максимальное число квартир может быть в доме, если номера квартир состоят не более чем из четырех цифр и не содержат цифры 0, 5 и 9?

в) Известно, что код сейфа является последовательностью цифр длиной не более шести символов. Сколько существует вариантов такого кода?

г) Иногда родители называют своих детей несколькими именами. Сколькими способами можно назвать ребенка, если всего имеется для выбора 30 имен, а каждому ребенку дают не более 4 имен?



648

а) Сколько четных номеров, состоящих не более чем из шести цифр, можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 6?

б) Для нумерации книг в библиотеке используется пять цифр 1, 2, 3, 4, 5. Можно ли с их помощью пронумеровать 2500 книг, поставив в соответствие каждой книге свое нечетное число, состоящее не более чем из пяти указанных цифр?

в) Автомобильный номер некоторого государства устроен следующим образом: номер начинается с одной, двух или трех букв, а затем идут пять цифр. Какое максимальное количество автомобильных номеров, оканчивающихся на 75, может быть, если в алфавите этого государства 26 букв и в номере могут быть использоваться все десять арабских цифр?

г) Игральный кубик, на каждой из шести граней которого написаны числа от 1 до 6, бросают пять раз и записывают подряд все выпадающие числа. Сколько различных последовательностей чисел могло быть в результате этого получено, если при третьем броске всегда выпадает число 4?

 π

649 Запишите следующие выражения и найдите их значение при $a = 2$, $b = -1$, $c = 5$:

а) Модуль разности квадратов a и c ;

б) Сумма модулей a , b и c ;

в) Модуль разности кубов a и b ;

г) Разность модулей a и b ;

д) Произведение модуля a и суммы b и c ;

е) Частное модуля разности a и b и модуля $-c$.

ж) Произведение суммы квадратов b и c и модуля разности квадратов a и b .

з) Частное квадрата разности a и c и модуля разности квадратов a и b .

650

Зная, что 1 сентября 2011 года четверг, определите, каким днем недели будет:

а) 31 октября 2011 года;

в) 23 февраля 2012 года;

б) 31 декабря 2011 года;

г) 8 марта 2012 года.

651

Множества заданы характеристическим свойством. Задайте их перечислением элементов:

а) $A = \{a: a \in \mathbb{Z}; -3 \leq 2a + 5 \leq 6\}$; в) $C = \{c: c \in \mathbb{N}_0; 7 \leq 4c + 9 < 15\}$;

б) $B = \{b: b \in \mathbb{N}; -5 < 3b - 9 \leq 11\}$; г) $D = \{d: -12 < 2d + 1 < 8 \text{ и } d = 7n + 3; n \in \mathbb{Z}\}$.

652 Множества A , B и C заданы характеристическим свойством:

$$A = \{x: x \in N; -4 \leq 4x - 3 \leq 12\};$$

$$B = \{y: y \in Z; -9 < 2y - 5 \leq 4\};$$

$$C = \{z: z \in N_0; 9 \leq 5z + 8 < 18\}.$$

1) Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A , B и C и отметьте на ней элементы данных множеств.

2) Найдите:

а) $A \cap B$; в) $B \cup C$; д) $(A \cup B) \cap C$; ж) $B \cap C \cap A$;

б) $A \cup C$; г) $A \cap C$; е) $B \cup (A \cap C)$; з) $(A \cap B) \cup C$.

653 а) Шеф-повар, повар и помощник повара получили за проведенный банкет 21 390 р. Как им надо разделить заработанные деньги, если они работали одинаковое время и их часовые ставки оплаты приведены в таблице:

Шеф-повар – 500 р./ч	Повар – 350 р./ч	Помощник повара – 80 р./ч
----------------------	------------------	---------------------------

б) В бизнес-центре расположены офисы 4 компаний. Расходы каждой из компаний на электроэнергию относятся как $2 : 5,5 : 4 : \frac{1}{3}$. Рассчитайте сумму, которую должны заплатить за электроэнергию за апрель эти четыре компании, если известно, что компания, которая платит за электроэнергию меньше всех, заплатила за апрель 3500 р.

в) Прямоугольный участок земли изображен на плане, выполненном в масштабе $1 : 7000$. Чему равна реальная площадь этого участка, если бо́льшая сторона прямоугольника равна на плане 9,3 см, а меньшая составляет $\frac{2}{3}$ от большей?

г) Прямоугольный участок земли, площадь которого равна $30\,000\text{ м}^2$, изображен на плане. Известно, что меньшая сторона прямоугольника равна $\frac{1}{3}$ большей, а бо́льшая равна на плане 5 см. Определите масштаб данного плана.

654 Упростите выражение при допустимых значениях переменных ($n \in N$):

а) $b^{3n+3} : (-b)^2$;	г) $\frac{a^{4n} \cdot a^7}{a \cdot a^{2n-1} \cdot a^5}$;	ж) $\frac{95x^{14}y^{25}z^{31}}{19x^{15}y^{24}z^{32}}$;
б) $-c^{5n} : c^{4n-3}$;	д) $\frac{x^{12} \cdot x^{41} \cdot x^{9n}}{x^{8n} \cdot x^{32} \cdot x^{20}}$;	з) $\frac{16a^{27}b^{54}c^{65}}{12a^{26}b^{55}c^{64}}$;
в) $(-x)^{3n} : x^{2n+3} \cdot x^4$;	е) $\frac{y^{6n+5} \cdot y^{-3n} \cdot y^9}{y^{2n} \cdot y^7 \cdot y^6}$;	и) $\frac{90m^{39}p^{73}k^{94}}{27k^{95}m^{40}p^{74}}$.

655 Определите, не вычисляя частного, делится ли число a на 11:

а) $a = 215\,526$; в) $a = 579\,997$; д) $a = 10\,157\,567$;
 б) $a = 279\,708$; г) $a = 4\,319\,289$; е) $a = 23\,118\,403$.

656 Определите, делится ли число a на b :

а) $a = 512^{327} + 427^{612}$, $b = 3$; в) $a = 343^{434} - 4$, $b = 5$;
 б) $a = 7^{121} + 8^{144}$, $b = 9$; г) $a = 333^{222} + 444^{555}$, $b = 7$.

657 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B . Найдите их пересечение и объединение:

- а) $A = \{a: a \equiv 2 \pmod{5}; -9 \leq a < 11\}$; б) $A = \{a: a \equiv -3 \pmod{7}; -11 \leq a < 12\}$;
 $B = \{b: b \equiv 1 \pmod{3}; 1 < b \leq 11\}$; $B = \{b: b \equiv -1 \pmod{2}; -4 < b < 6\}$.

D

658 а) Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых встречаются только цифры 3, 4, 8, 9?

б) Некоторый алфавит состоит из трех букв – В, Г, Д. Словом в этом языке является любая последовательность из четырех букв. Сколько всего слов в этом языке?

659

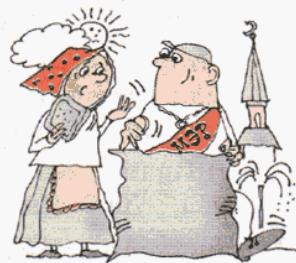
а) В гостинице номера комнат состоят не более чем из пяти цифр и не содержат цифр 0, 1, 3 и 9. Какое максимальное количество номеров может быть в этой гостинице?

б) Код банковской ячейки является последовательностью цифр длиной не более семи символов. Сколько всего возможно вариантов такого кода?

660

а) Игральный кубик, на каждой из шести граней которого написаны числа от 3 до 8, бросают четыре раза и записывают подряд все выпадающие числа. Сколько различных последовательностей чисел можно в результате этого получить, если при втором броске всегда выпадало число 7?

б) Идентификационный номер налогоплательщика (ИНН) в некотором государстве устроен следующим образом: номер начинается с двух, трех или четырех цифр, а затем идут три буквы. Какое максимальное количество ИНН может быть в этом государстве, если ИНН начинаются на 12, в алфавите этого государства 32 буквы и в номере могут использоваться все десять арабских цифр?

**661**

Зная, что 1 января 2012 года воскресенье, определите, каким днем недели будет:

- а) 25 мая 2012 года; б) 1 июля 2012 года;
 в) 30 сентября 2012 года; г) 7 января 2013 года.

662

Множества заданы характеристическим свойством. Задайте их перечислением элементов:

- а) $A = \{a: a \in \mathbb{Z}; -7 \leq 2a + 4 \leq 9\}$; б) $B = \{b: b \in \mathbb{N}; -6 < 3b - 2 \leq 7\}$;
 в) $C = \{c: c \in \mathbb{N}_0; 4 \leq 5c + 3 < 22\}$; г) $D = \{d: -9 < 6d + 4 < 18; d = 4n + 1; n \in \mathbb{Z}\}$.

663

Множества A , B и C заданы характеристическим свойством:

$$A = \{x: x \in \mathbb{N}_0; -8 \leq 3x + 7 \leq 18\}; \quad B = \{y: y \in \mathbb{N}; -4 < 7y + 5 \leq 26\};$$

$$C = \{z: z \in \mathbb{Z}; -18 \leq 6z - 9 < 16\}.$$

1) Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A , B и C и отметьте на ней элементы данных множеств.

2) Найдите:

- а) $A \cap B$; б) $A \cup C$; в) $B \cup A$; г) $A \cap C$; д) $(A \cup B) \cap C$; е) $B \cup (A \cap C)$; ж) $B \cap C \cap A$; з) $(A \cap B) \cup C$.

664 а) Расходы столовой крупного металлургического комбината на приготовление завтрака, обеда, полдника и ужина относятся как $3 : 8,2 : \frac{5}{3} : 6$. Сколько денег тратит столовая в день на приготовление завтрака, обеда, полдника и ужина, если известно, что приготовление полдника обходится в 55 тыс. р.?

б) Прямоугольный участок земли изображен на плане, выполненном в масштабе $1 : 9000$. Чему равна реальная площадь этого участка, если бо́льшая сторона прямоугольника равна на плане 5,6 см, а меньшая составляет $\frac{5}{7}$ от большей?

665 Упростите выражение при допустимых значениях переменных ($n \in N$):

а) $a^{4n+8} : (-a)^5$; в) $\frac{a^{8n} \cdot a^9}{a^6 \cdot a^{5n-3} \cdot a^7}$; д) $\frac{102x^{18}y^{44}z^{56}}{17x^{17}y^{43}z^{55}}$;
 б) $-b^{7n+1} : b^{5n-4}$; г) $\frac{x^{19} \cdot x^{38} \cdot x^{8k}}{x^{7k} \cdot x^{45} \cdot x^{11}}$; е) $\frac{45a^{33}b^{71}c^{93}}{27a^{32}b^{72}c^{94}}$.

666 Определите, не вычисляя частного, делится ли число a на 11.

а) $a = 314\,712$; б) $a = 767\,283$; в) $a = 1\,516\,121$.

667 Определите, делится ли число a на b .

а) $a = 416^{361} + 361^{416}$, $b = 3$; б) $a = 517^{218} - 4$, $b = 7$.

668 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B . Найдите их пересечение и объединение:

$$A = \{a: a \equiv 2 \pmod{4}; -12 \leq a < 20\};$$

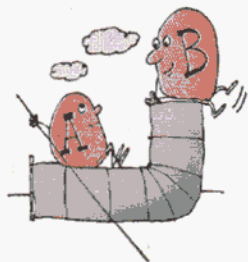
$$B = \{b: b \equiv 3 \pmod{5}; 2 < b \leq 21\}.$$

669 Решите неравенство $|ax + b| < c$:

$$a = 4\frac{1}{2} + 0,039 : \left(\frac{1}{20} \cdot (2,31 : 0,077)\right) - 2,526;$$

$$b = 11,54 + \left(17,5 - 8,25 \cdot \frac{10}{11}\right) \cdot \left(11\frac{2}{3} : 2\frac{2}{9} + 3,5\right) - 12,6 : 2\frac{1}{2};$$

$$c = 7 : 0,2625 - \frac{49}{60} - 3,6 : \left(68,1 : 7,5 - 7\frac{17}{20} + 1\frac{1}{50}\right) + 4\frac{5}{6} \cdot \frac{33}{58}.$$



С **670*** Три путника решили устроить привал и вместе пообедать. У первого было 5 бутербродов, у второго – 4 бутерброда. У третьего бутербродов не было, поэтому он подарил первым двум за съеденные им бутерброды 36 орехов. Все путники ели поровну. Как следует распределить между первым и вторым путниками орехи, подаренные третьим, чтобы взнос каждого из путников в совместную трапезу был одинаковым?

671* В конструкторе имеются три вида фигур: кубики, шары, параллелепипеды. Все фигуры одного вида одинаковые. Шесть шаров, четыре кубика и три параллелепипеда весят 1200 г, а шесть кубиков, четыре шара и семь параллелепипедов весят 1700 г. Сколько весят кубик, шар и параллелепипед вместе?



§ 2. Сбор и анализ информации

1. Способы упорядочивания информации



*Измеряй все, поддающееся измерению,
и сделай таковым все, не поддающееся измерению.*

Галилео Галилей (1564–1642),
итальянский физик, математик и философ

В современном мире наличие необходимой информации в нужный момент времени является важным конкурентным преимуществом как для успеха отдельного человека, так и для различных коммерческих и некоммерческих организаций. Большой поток информации обрушивается на нас из всевозможных печатных изданий, радио- и телевизионных передач и, конечно, из Интернета. Для того чтобы информация приносила пользу, ее нужно уметь систематизировать, анализировать и делать на ее основании выводы, приводящие к достижению поставленных целей.

Одним из хорошо известных нам способов наведения порядка в информации, с которым мы часто встречаемся и в учебе, и в жизни, являются *таблицы*. Составление таблиц помогает нам проанализировать условие задачи, построить график заданной в таблице зависимости, систематизировать информацию, быстрее найти ответ на интересующий нас вопрос, – например, нужную телевизионную передачу, ведь программа телевидения – это та же таблица.

Для того чтобы вспомнить, как с помощью таблиц можно ответить на самые различные вопросы, рассмотрим следующую задачу.

Задача 1.

В одной из школ города Москвы с 1999 по 2003 год велись наблюдения за погодой. Ежедневно в 12 часов дня школьники измеряли температуру воздуха. На основании полученных данных была составлена следующая таблица:

Среднемесячная температура воздуха в Москве (в °C)

Месяц Год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1999	-3	-4	+1	+12	+11	+25	+23	+17	+14	+9	-4	-1
2000	-4	-1	-1	+13	+13	+18	+21	+19	+12	+8	+1	-2
2001	-2	-6	-1	+13	+13	+18	+24	+18	+12	+6	+1	-9
2002	-4	+1	+3	+9	+14	+19	+25	+18	+13	+4	-1	-12
2003	-7	-8	-2	+5	+16	+13	+22	+18	+13	+8	+2	-2

Пользуясь представленной информацией, определите:

- 1) Какой была среднемесячная температура воздуха в Москве в августе 2000 г.?
- 2) В какие месяцы среднемесячная температура воздуха была равна +14 °C?
- 3) В какие месяцы среднемесячная температура была наибольшей, наименьшей?

4) В какие месяцы среднемесячная температура была больше $+20^{\circ}\text{C}$?

5) На сколько градусов Цельсия отличалась среднемесячная температура в феврале 1999 г. по сравнению с февралем 2002 г.?

Решение:

1) Для того чтобы определить значение температуры в августе 2000 г., находим в таблице строку, соответствующую 2000 г., и находим столбец, соответствующий августу. На их пересечении мы получаем необходимую для нас информацию: в августе 2000 г. среднемесячная температура воздуха была равна $+19^{\circ}\text{C}$.

Месяц Год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1999	-3	-4	+1	+12	+11	+25	+23	+17	+14	+9	-4	-1
2000	-4	-1	-1	+13	+13	+18	+21	+19	+12	+8	+1	-2
2001	-2	-6	-1	+13	+13	+18	+24	+18	+12	+6	+1	-9
2002	-4	+1	+3	+9	+14	+19	+25	+18	+13	+4	-1	-12
2003	-7	-8	-2	+5	+16	+13	+22	+18	+13	+8	+2	-2

2) Для того чтобы определить, в какие месяцы среднемесячная температура воздуха была равна $+14^{\circ}\text{C}$, находим все клетки таблицы со значением температуры, равным $+14^{\circ}\text{C}$, и определяем, на пересечении какого столбца и какой строки они находятся. Получаем, что среднемесячная температура воздуха была равна $+14^{\circ}\text{C}$ в мае 2002 г. и в сентябре 1999 г.

Месяц Год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
1999	-3	-4	+1	+12	+11	+25	+23	+17	+14	+9	-4	-1
2000	-4	-1	-1	+13	+13	+18	+21	+19	+12	+8	+1	-2
2001	-2	-6	-1	+13	+13	+18	+24	+18	+12	+6	+1	-9
2002	-4	+1	+3	+9	+14	+19	+25	+18	+13	+4	-1	-12
2003	-7	-8	-2	+5	+16	+13	+22	+18	+13	+8	+2	-2

3) Сравнивая значения температур в таблице, определяем, что наибольшее среднемесячное значение температуры было равно $+25^{\circ}\text{C}$. Такая температура была в июне 1999 г. и в июле 2002 г. А наименьшее значение -12°C было в декабре 2002 г.

4) Аналогичным образом выбираем из таблицы значения температуры больше $+20^{\circ}\text{C}$ и определяем соответствующие год и месяц: июнь 1999 г. и июль 1999–2003 гг.

5) Для ответа на последний вопрос находим по таблице температуру в феврале 1999 г. (-4°C) и в феврале 2002 г. ($+1^{\circ}\text{C}$). Значит, в феврале 2002 г. среднемесячная температура была на $+1 - (-4) = 5^{\circ}\text{C}$ выше, чем в феврале 1999 г.

Таким образом, при решении задачи 1 таблица помогла нам быстро ответить на поставленные вопросы. Если бы данная информация была представлена в виде обычного текста, то поиск ответа занял бы гораздо больше времени. Тем не менее анализ таблиц не позволяет наглядно показать соотношения между различными величинами.

Быстро определить наибольшие и наименьшие значения величин, сравнить данные в разные периоды времени, а также ответить на многие аналогичные вопросы

позволяют такие уже известные нам способы графического представления информации, как графики зависимостей, столбчатые и круговые диаграммы.

Для того чтобы уточнить алгоритмы построения столбчатых и круговых диаграмм, решим следующую задачу.

Задача 2.

В понедельник книжный магазин получил выручку в размере 10 тыс. р., во вторник – 45 тыс. р., в среду – 70 тыс. р., в четверг – 25 тыс. р., а в пятницу – 30 тыс. р. По указанным данным постройте столбчатую и круговую диаграммы.

Решение:

В задаче дана информация о величине выручки в каждый из дней недели с понедельника по пятницу. Упорядочим эту информацию с помощью таблицы:

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт
Выручка, тыс. р.	10	45	70	25	30

Мы знаем, что столбчатая диаграмма показывает зависимость между значениями величин с помощью высоты столбиков. Для того чтобы их построить, отметим на горизонтальной оси дни недели, в которые подсчитывалась выручка магазина, а на вертикальной – значение выручки в эти дни. Затем поставим в соответствие каждому дню недели столбик соответствующей высоты (рис. 16).



Рис. 16

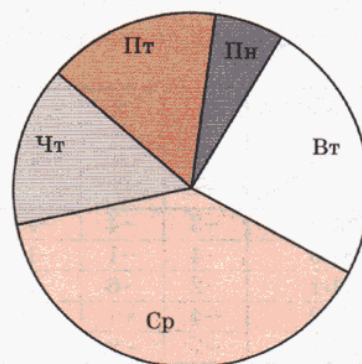


Рис. 17

Таким образом, алгоритм построения столбчатой диаграммы включает в себя следующие шаги:

Алгоритм построения столбчатой диаграммы

1. Отметить на горизонтальной оси значения независимой величины.
2. Отметить на вертикальной оси соответствующие значения зависимой величины.
3. Для каждого значения независимой величины построить столбик, высота которого равна соответствующему значению зависимой величины.

Что касается круговых диаграмм, то они показывают зависимость между значениями величин с помощью величин центральных углов круга.

При построении круговой диаграммы предполагается, что сумма всех зависимых величин составляет 360° , а доля каждой зависимой величины в их общей сумме

отображается с помощью соответствующего центрального угла. Поэтому алгоритм построения круговой диаграммы состоит из следующих шагов:

Алгоритм построения круговой диаграммы

1. Найти сумму всех зависимых величин ($S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$).
2. Найти долю каждой зависимой величины в общей сумме ($\frac{a_i}{S}$, $i = 1, \dots, n$).
3. Вычислить величину центрального угла, соответствующую доле каждой зависимой величины ($360^\circ \cdot \frac{a_1}{S}$, $360^\circ \cdot \frac{a_2}{S}$, ..., $360^\circ \cdot \frac{a_n}{S}$).
4. Построить центральные углы, соответствующие каждой зависимой величине.

Пользуясь данным алгоритмом, построим круговую диаграмму по условию нашей задачи. Вначале вычислим сумму S (в тыс. р.) всех зависимых величин:

$$S = 10 + 45 + 70 + 25 + 30 = 180.$$

Для того чтобы записать результат поиска доли каждой зависимой величины в общей сумме, используем исходную таблицу:

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт
Выручка, тыс. р.	10	45	70	25	30
Доля выручки, S	$\frac{10}{180} = \frac{1}{18}$	$\frac{45}{180} = \frac{1}{4}$	$\frac{70}{180} = \frac{7}{18}$	$\frac{25}{180} = \frac{5}{36}$	$\frac{30}{180} = \frac{1}{6}$
Величина соответствующего центрального угла	$360^\circ \cdot \frac{1}{18} = 20^\circ$	$360^\circ \cdot \frac{1}{4} = 90^\circ$	$360^\circ \cdot \frac{7}{18} = 140^\circ$	$360^\circ \cdot \frac{5}{36} = 50^\circ$	$360^\circ \cdot \frac{1}{6} = 60^\circ$

После построения указанных центральных углов мы получаем круговую диаграмму, приведенную на рис. 17.

К

672 В таблице приведены данные о численности населения Российской Федерации в 2002–2009 гг.

Численность населения Российской Федерации на 1 января, млн. человек

Год	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Федеральный округ								
Центральный	38,1	37,9	37,7	37,5	37,4	37,2	37,2	37,1
Северо-Западный	14,1	13,9	13,8	13,7	13,6	13,5	13,5	13,5
Южный	22,9	22,9	22,8	22,8	22,8	22,8	22,8	22,9
Приволжский	31,3	31,1	30,9	30,7	30,5	30,3	30,2	30,2
Уральский	12,4	12,4	12,3	12,3	12,2	12,2	12,2	12,3
Сибирский	20,2	20,0	19,9	19,8	19,7	19,6	19,6	19,5
Дальневосточный	6,7	6,7	6,6	6,6	6,5	6,5	6,5	6,5
Всего	145,6	145,0	144,2	143,5	142,8	142,2	142,0	141,9

Пользуясь представленной информацией, определите:

- 1) Какой была численность населения в Сибирском федеральном округе в 2007 г., в Приволжском федеральном округе в 2003 г.?
- 2) В каком из федеральных округов и на какую дату численность населения была равна 6,5 млн. человек, 12,4 млн. человек?
- 3) В каком из федеральных округов численность населения была наибольшей в 2009 г.?
- 4) В каком из федеральных округов численность населения была наименьшей в 2005 г.?
- 5) В каких федеральных округах и на какую дату численность населения была больше 31 млн. человек?
- 6) В каких федеральных округах и на какую дату численность населения была меньше 13 млн. человек?
- 7) Как изменилась общая численность населения РФ с 1. 01. 03 по 1. 01. 09?

673

В таблице приведено расписание вылета авиарейсов из аэропорта Домодедово (Москва). Прилет всех указанных рейсов происходит в день их вылета.

Расписание вылета авиарейсов из аэропорта Домодедово (Москва)

Номер рейса	Пункт назначения	Время вылета (московское)	Время прилета (московское)
OS606	Вена	05:35	08:50
NN335	Барселона	08:40	13:20
UN255	Алматы	10:50	15:20
S716	Челябинск	11:10	13:25
C7905	Ереван	11:55	14:55
UA965	Вашингтон	12:20	23:15
UN353	Лондон	15:00	19:10
LH3199	Дюссельдорф	16:10	19:40
EK314	Дубай	16:55	22:00
LX1337	Женева	18:30	22:20
LH3187	Франкфурт-на-Майне	19:35	22:55

Пользуясь представленной информацией, определите:

- 1) В какое время вылетает рейс в Челябинск?
- 2) В какое время вылетает рейс LH3199?
- 3) Чему равно московское время прилета в Дубай рейса EK134?
- 4) Чему равна длительность полета в Барселону?
- 5) Какие рейсы улетают из Домодедово в период с 16:00 до 22:00?
- 6) Какой рейс среди представленных имеет наименьшую длительность полета? Чему равна длительность этого полета?
- 7) В каком рейсе среди представленных длительность полета наибольшая? Чему она равна?
- 8) Какой рейс длится 4,5 часа; 3 часа?
- 9) В какие города надо лететь больше 3 часов, но меньше 5 часов?
- 10) Полет в какие города занимает более 5 часов?

Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую зависимость длительности полета от выбранного пункта назначения.

- 674** В таблице представлена информация о проданных в течение одного рабочего дня товарах.

Отчет о продажах в магазине канцелярских товаров 21. 04. 2011

№ п/п	Наименование ассортиментной позиции	Единица измерения	Цена единицы товара	Количество проданных единиц товара
1	Бумага «Снегурочка»	пачка	125 р.	15
2	Тетрадь общая 48л.	штука	38 р.	40
3	Ручка шариковая, синяя	штука	5,2 р.	75
4	Дырокол	штука	60 р.	30
5	Фломастеры (6 цветов)	набор	40 р.	45
6	Карандаш с ластиком	штука	3 р.	120
7	Файлы (100 шт.)	упаковка	159 р.	35

Используя представленную информацию, определите:

- 1) Какой из проданных товаров является самым дорогим, самым дешевым?
- 2) Какую сумму денег получили за продажу тетрадей?
- 3) За какой товар была получена самая большая выручка, самая маленькая выручка?
- 4) Сколько денег было получено от всех продаж в этот день?
- 5) Сколько единиц товара было продано в этот день?
- 6) Какой товар составил самую большую долю в продажах, самую маленькую долю в продажах (в установленных единицах измерения)?

Постройте круговую диаграмму, показывающую долю продаж каждого наименования (в установленных единицах измерения) в общих продажах магазина канцелярских товаров 21. 04. 2010.

- 675** В таблице приведены данные о температуре морской воды в некоторых городах в 14 часов 10. 03. 2010.

Температура морской воды 10. 03. 2010

№ п/п	Название моря	Название города, в котором проводились измерения	Температура, °С
1	Адриатическое море	Пескара	12,8
2	Азовское море	Приморско-Ахтарск	1
3	Балтийское море	Гданьск	3,1
4	Ионическое море	Кротоне	13,5
5	Ирландское море	Ливерпуль	6
6	Критское море	Ираклион	16
7	Лигурийское море	Сан-Ремо	12,8
8	Мраморное море	Стамбул	9
9	Средиземное море	Родос	16,4
10	Тирренское море	Неаполь	13,4
11	Черное море	Сочи	9,5
12	Эгейское море	Наксос	15,7

Используя приведенные данные, определите:

- 1) Какой была наименьшая температура морской воды, в каком море это было и в каком городе?
- 2) Какой была наибольшая температура морской воды, в каком море это было и в каком городе?
- 3) В каком городе и в каком море температура морской воды была равна 13,5 °C?
- 4) В каких городах и в каких морях температура воды была больше 10 °C? Меньше 12 °C?
- 5) Какой была температура воды в Ирландском море в Ливерпуле?

Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую связь температуры морской воды и городов, в которых проводили ее измерение.

676

В Интернете был проведен социологический опрос, посвященный вопросам образования. Постройте круговые диаграммы, иллюстрирующие результаты, полученные после анализа ответов участников опроса.

- а) Вопрос: Какие школьные предметы кажутся вам наиболее важными?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Математика, физика, информатика	20%
Физика, химия, биология, география	10%
Русский язык, литература, иностранные языки	25%
Все предметы одинаково важны	45%

- б) Вопрос: В какой момент можно прекращать свое образование?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
После окончания школы	5%
После окончания профессионального училища	5%
После окончания высшего учебного заведения	20%
Образование не должно прекращаться	70%

- в) Вопрос: Есть ли у вас высшее образование?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Да	35%
Нет	15%
Учусь в вузе	40%
Имею два высших образования	10%

- г) Вопрос: Что является для вас наиболее важным при выборе будущей профессии?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Интерес к будущей деятельности	50%
Престиж и доходность будущей специальности	20%
Возможность последующего трудоустройства	15%
Советы родителей и друзей	10%
Другое	5%



677 Найдите ошибки в следующих рассуждениях:

а) Рассмотрим уравнение $3(x - 5) = 0$. Разделим обе его части на $x - 5$, получим: $\frac{3(x - 5)}{x - 5} = \frac{0}{x - 5}$. Правая часть равенства равна 0, а левая после сокращения на $x - 5$ равна 3. Значит, $3 = 0$.

б) Рассмотрим равенство $70 - 34 - 36 = 175 - 85 - 90$. Вынесем за скобки в правой и левой частях равенства общие множители. Получим:

$$2 \cdot (35 - 17 - 18) = 5 \cdot (35 - 17 - 18)$$

Разделив обе части данного равенства на общий множитель $(35 - 17 - 18)$, получаем, что $2 = 5$.

в) Мы знаем, что $1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$. Умножим левую часть равенства на 10 см, а правую часть – на 100 мм. Так как $10 \text{ см} = 100 \text{ мм}$, то при умножении равенства на одно и то же число оно не изменится, значит:

$$1 \cdot 10 \text{ см} = 10 \cdot 100 \text{ мм, или } 10 \text{ см} = 1000 \text{ мм}$$

Разделив последнее равенство на 10, получаем: $1 \text{ см} = 100 \text{ мм}$. Таким образом, мы получили, что 1 см одновременно равен 10 мм и 100 мм.

г) Рассмотрим равенство $6x : 6x = 11y : 11y$. В каждой части равенства вынесем за скобки общий числовой множитель, получим: $6 \cdot (x : x) = 11 \cdot (y : y)$. А так как $x : x = y : y = 1$, то $6 = 11$.

678 Сравните значения величин:

- а) 56 м 9 дм 43 см и 562 дм 415 мм; г) 32 т 236 кг и 310 ц 112 кг 1500 г;
 б) 9 км 468 м 15 дм и 9300 м 1860 дм; д) 9 ц 1200 кг 400 г и 2 т 2 ц 400 г;
 в) 9 сут. 15 ч 98 мин и 220 ч 183 мин; е) 18 а 156 м² и 0,19 га 3 а 18 м².

679 Найдите неполное частное и остаток при делении на (-6) следующих чисел:

- а) 0; в) 15; д) 22; ж) 37; и) -35; л) 58;
 б) 11; г) -9; е) -14; з) -22; к) 44; м) -52.

680 а) Инвестор разместил свои сбережения сроком на четыре года в инвестиционные фонды А и В. В инвестиционный фонд А он вложил 25 000 р. под 10% годовых, а в инвестиционный фонд В – 20 000 р. под 12% годовых. В каком из фондов инвестор заработает больше денег и на сколько?

б) Какую сумму денежных средств нужно положить в банк, чтобы получить через 3 года доход в размере 40 492,8 р., если банк предлагает разместить вклады под 12% годовых?

в) Выручка компании за последние 5 лет ежегодно увеличивалась на 20%. Определите, на сколько процентов увеличилась годовая выручка компании за эти 5 лет?

г) Коммерческий банк выплачивает доход по вкладам на следующих условиях:

Срок вклада	6 месяцев	1 год	1 год 6 месяцев	2 года
Годовая процентная ставка	10%	12%	14%	16%

Какой процентный доход может получить вкладчик, разместивший на депозите 50 000 р., через: 1) 6 месяцев; 2) 1 год; 3) 1 год 6 месяцев; 4) 2 года? (Считать, что в течение указанного срока вкладчик не снимает деньги со своего счета.)

681 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy и после этого постройте график:

- а) $f(x) = 5x + 10$; в) $f(x) = 4,5x - 9$; д) $f(x) = 2,2x + 11$;
 б) $f(x) = -3x + 6$; г) $f(x) = -7x - 3,5$; е) $f(x) = -18x - 9$.

682 Упростите выражения, выполняя равносильные преобразования:

- а) $-7y - (-4x - (5y - 6x - 7z)) - (8x - 9z - 3y)$;
 б) $(8a - 3b) - ((5c - 6a) - 2b) - (-4c - (7b - 11a))$;
 в) $(14a - 18b) - (9a - 15b) - ((6b + 8a) - (12a + 7b))$;
 г) $-(5m + 9n) - (13n - (8m + 4n)) + (7m - (3n - 8m)) - (12m - 10n)$.

683 В таблице значений некоторой линейной функции два значения из пяти заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их.

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	7	-2	3	-4	-5

б)

x	-2	-1	0	1	2
y	-9	5	3	1	7

684 Найдите значение буквенного выражения при указанных значениях букв:

- а) $(2x - (3y - 7x)) - 6x + 2y - (3x - (5y - (4x - (2x + 7y)) - 2y))$, если $x = 3$, $y = -1$;
 б) $3p + 2(p - 3q) - 5p^2 - 7q^2 + 5pq - (6pq + 5p^2 - 7q^2) + pq - 6q - 5p$, если $p = 2$, $q = -1$;
 в) $2b - 0,5a + (5c - (2d - a)) + (3c - 7d) - (-1,5a - 10d + 7c)$, если $a = 1$, $b = 3$, $c = -1$, $d = -3$;
 г) $x - ((5x - 4y) - 2z) + 6x - 2(6y - (9x - 7z)) + 4y + (3y - 4(-3z + 5x))$, если $x = 0,2$, $y = 0,1$, $z = 0,4$.

D

685 В таблице приведено расписание движения автобусов от московского автовокзала. Прибытие всех указанных маршрутов в пункт назначения происходит в день их отбытия из Москвы.

Расписание движения автобусов от московского автовокзала

№ п/п	Пункт назначения	Отправление из Москвы	Прибытие в место назначения	Длина маршрута, км
1	Алексин	08:15	12:15	195
2	Рыбинск	09:00	17:00	348
3	Переславль	09:30	12:30	134
4	Брянск	10:00	19:20	448
5	Гусь-Хрустальный	11:00	16:10	253
6	Иваново	12:00	18:00	290
7	Муром	13:30	19:50	313
8	Десногорск	15:50	23:50	402
9	Гаврилов-Ям	16:45	22:00	258
10	Касимов	18:20	23:50	301
11	Владимир	19:45	23:15	178

Пользуясь представленной информацией, определите:

- 1) В какое время автобус отправляется в Десногорск? В какое время прибывает автобус во Владимир?
- 2) Чему равна длительность поездки в Брянск, в Переславль?
- 3) Какие автобусы отходят от автовокзала в период с 14:00 до 19:00?

- 4) Поездка в какой из указанных городов требует меньше всего времени, больше всего времени?
- 5) В какой город надо ехать 5,5 часа?
- 6) В какие города поездка длится больше двух часов, но меньше 5 часов?
- 7) С какой средней скоростью (с точностью до единиц) движется автобус по маршруту Москва–Муром?
- 8) На каких маршрутах средняя скорость движения (с точностью до единиц) больше или равна 50 км/ч?

Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую зависимость длительности поездки от выбранного пункта назначения.

686

В таблице представлена информация о проданных в течение одного рабочего дня товарах.

Отчет о продажах в магазине бытовой техники 30. 04. 2011

№ п/п	Наименование ассортиментной позиции	Единица измерения	Цена единицы товара	Количество продан- ных единиц товара
1	Чайник электрический	штука	570 р.	130
2	Мясорубка	штука	2590 р.	55
3	Блендер	штука	660 р.	30
4	Тостер	штука	1140 р.	45
5	Весы кухонные	штука	680 р.	35
6	Пресс для цитрусовых	штука	820 р.	40
7	Миксер	штука	900 р.	25

Используя представленную информацию, определите:

- 1) Какой из проданных товаров является самым дорогим, самым дешевым?
- 2) Какую сумму денег получили за продажу тостеров?
- 3) За какой товар была получена самая большая выручка, самая маленькая выручка?
- 4) Сколько денег было получено от всех продаж в этот день?
- 5) Сколько единиц товара было продано в этот день?
- 6) Какой товар составил самую большую долю в продажах, самую маленькую долю в продажах (в штуках)?

Постройте круговую диаграмму, показывающую долю продаж каждого наименования (в штуках) в общих продажах в течение рассматриваемого дня.

687

В таблице приведены данные о температуре воздуха в некоторых городах в 13 часов дня 12. 03. 2010:

Температура воздуха 12. 03. 2010

№ п/п	Название города	Температура, °С	№ п/п	Название города	Температура, °С
1	Алжир	+10	8	Лиссабон	+10
2	Афины	+14	9	Мадрид	+5
3	Брюссель	+4	10	Минск	-1
4	Вена	+3	11	Москва	0
5	Дублин	+7	12	Неаполь	+9
6	Кёльн	+2	13	Ницца	+18
7	Лимассол	+22	14	Цюрих	-2

Используя приведенные данные, определите:

- 1) В каком городе была наименьшая температура воздуха и чему она была равна?
- 2) В каком городе была наибольшая температура воздуха и чему она была равна?
- 3) В каком городе температура воздуха была равна $+10^{\circ}\text{C}$?
- 4) В каких городах температура воздуха была больше $+5^{\circ}\text{C}$, меньше $+2^{\circ}\text{C}$?
- 5) Какой была температура воздуха в Вене?
- 6) На сколько градусов отличалась температура воздуха в Мадриде от температуры воздуха в Цюрихе?
- 7) В каких городах температура воздуха отличалась на 2°C ?

Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую зависимость температуры воздуха от города, в котором проводили ее измерение.

688

В Интернете был проведен социологический опрос, посвященный вопросам, связанным с киноискусством. Постройте круговые диаграммы, иллюстрирующие результаты, полученные после анализа ответов участников опроса.

- а) Вопрос: Какая из перечисленных кинокомедий вам нравится больше всего?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
«Операция Ы» и другие приключения Шурика»	50%
«Джентльмены удачи»	35%
«Ширли-мырли»	10%
Другие комедии	5%

- б) Вопрос: Хотели бы вы, чтобы ваш ребенок был актером, актрисой?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Конечно, буду настаивать на этом	10%
Ни за что не позволю ему это сделать	10%
Да, если ребенок захочет этого	55%
Пусть сначала получит нормальную профессию	25%

- в) Вопрос: Если бы вы были режиссером, то какой фильм сняли?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Экранизацию произведения классиков литературы	10%
Комедию	20%
Фильм о человеке	40%
Фильм для детей	10%
Другой фильм	20%

- г) Вопрос: Хотели вы когда-нибудь сниматься в кино?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Да, очень сильно, в детстве, сейчас уже нет	25%
Хотелось, но не очень	15%
Нет, никогда	20%
Да, и сейчас хочу	40%

689 Сравните значения величин:

- а) 23 м 7 дм 56 см и 231 дм 928 мм; г) 54 т 417 кг и 539 ц 235 кг 3600 г;
 б) 12 км 593 м 27 дм и 12 500 м 963 дм; д) 7 ц 3200 кг 1200 г и 3 т 5 ц 800 г;
 в) 6 сут. 9 ч 129 мин и 154 ч 13 мин; е) 29 а 356 м² и 0,3 га 5 а 12 м².

690 Найдите неполное частное и остаток при делении на (-8) следующих чисел:

- а) 0; б) 14; в) 23; г) 35; д) -39 ; е) 53;
 б) 12; г) -7 ; е) -15 ; з) -27 ; к) 44; м) -59 .

691 а) Какую сумму денежных средств нужно положить в банк, чтобы получить через 2 года доход в размере 12 720 р., если банк предлагает разместить вклады под 12% годовых?

б) Коммерческий банк выплачивает доход по вкладам на следующих условиях:

Срок вклада	6 месяцев	1 год	1 год 6 месяцев	2 года
Годовая процентная ставка	8%	9%	10%	12%

Какой процентный доход может получить вкладчик, разместивший на депозите 70 000 р., через: 1) 9 месяцев; 2) 1 год; 3) 1 год 6 месяцев; 4) 2 года? (Считать, что в течение указанного срока вкладчик не снимает деньги со своего счета.)

692 Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy и после этого постройте график:

- а) $f(x) = 6x + 9$; б) $f(x) = -3,5x - 7$; в) $f(x) = -5x + 2,5$.

693 Упростите выражения, выполняя равносильные преобразования:

- а) $-((17a - 12b) - (5a - 7b)) - ((14b - 9a) - (15a + 8b))$;
 б) $4m + 6n - (7n - 2(3m + 5n)) - (6m - (5n - 2m)) - (4m + 8n)$.

694 В таблице значений некоторой линейной функции два из пяти значений заданы неверно. Найдите неверные значения и исправьте их:

а)

x	-2	-1	0	1	2
y	2	-4	6	8	1

б)

x	-2	-1	0	1	2
y	10	-2	4	1	8

695 Найдите значение буквенного выражения при указанных значениях букв:

- а) $5x - (8y - 5x) - 9x + 6y - (7x - (8y - (2x - (6x - 4y)) - 5y))$, если $x = 2$, $y = -2$;
 б) $4p + 5(p - 2q) - 6p^2 - 8q^2 + 7pq - 2(2pq - 3p^2 - 4q^2) - 3pq - 9p$, если $p = 3$, $q = -1$.

696 Решите неравенство $|x + a| - |x - b| < c$:

$$a = ((2779,6 + 8024,4) : (1,98 + 2,02) - 701) \cdot 0,001;$$

$$b = (14,068 + 15,78) : (1,875 + 0,175) : (0,325 + 0,195) : 4;$$

$$c = \left(\frac{90,09 : 91 + 3,774 : 0,34}{232,31 : 17,87 + 186,85 : 5,05} - 0,0418 \right) \cdot 10.$$



697* В цистерне больше 10 л воды. Как отмерить 6 л воды, если имеются канистра емкостью 5 л и ведро емкостью 9 л?

698* В вазе лежит 50 конфет: ириски и шоколадные конфеты. Среди любых 22 из них хотя бы одна конфета шоколадная, а среди любых 30 из них хотя бы одна конфета ириска. Сколько ирисок и сколько шоколадных конфет в этой вазе?

2. Статистические характеристики



Если аксиоматический метод является стилем современной математики, то потребности практики... являются ее фундаментом.

Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918),
русский математик и механик

Изучение информации настолько важно для развития общества, что этому процессу посвящена отдельная наука, занимающаяся сбором, измерением, обработкой и анализом разнообразных количественных и качественных данных. Эта наука получила название *статистика* от латинского слова *status* («положение вещей»).

Статистика изучает, в частности, динамику численности населения и производства продукции, объемы запасов полезных ископаемых и многое другое. Одним из ее разделов является *математическая статистика*, изучающая математические методы систематизации и анализа данных.

В математической статистике для описания и анализа имеющихся числовых данных используются *статистические характеристики*. С одной из них – средним арифметическим – вы уже знакомы. В этом пункте мы познакомимся с некоторыми другими важными характеристиками систем числовых данных.

Но прежде всего уточним понятие среднего арифметического нескольких чисел.

Определение 1. Средним арифметическим нескольких чисел называется результат деления суммы этих чисел на их количество.

Вычислим, например, среднее арифметическое ежегодного производства мопедов в Российской Федерации в 1999–2008 гг. Для этого используем данные следующей таблицы.

Количество мопедов, произведенных в Российской Федерации за год

Год	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Количество мопедов	4816	3761	3143	2515	1699	1470	2211	768	4662	4347

Чтобы найти среднее арифметическое чисел, представленных в таблице, надо сумму этих чисел разделить на их количество.

Сумма данных чисел равна:

$4816 + 3761 + 3143 + 2515 + 1699 + 1470 + 2211 + 768 + 4662 + 4347 = 29\,392$,
а их количество 10. Следовательно, среднее арифметическое данных чисел равно

$$\frac{29\,392}{10} = 2939,2 \approx 2939$$

Значит, если бы с 1999 по 2008 г. выпускали ежегодно примерно 2939 мопедов, то тем самым обеспечили бы заданный реальный объем производства.

Среднее арифметическое является своеобразным критерием эффективности работы производства. Так, например, если выпуск продукции в какие-то годы ниже среднего

арифметического, то необходимо проанализировать причины этого и выработать программу действий, предотвращающую спады в будущем.

Однако данная характеристика не является достаточной для полноценного анализа числового набора. Так, например, она не дает представлений о том, в каких пределах изменяются значения исследуемой величины. Поэтому в статистике для наборов чисел вводятся и другие характеристики: наибольшее и наименьшее значение набора чисел, *размах набора чисел*.



Определение 2. Размахом набора чисел называется разность между наибольшим и наименьшим числом из этого набора.

Таким образом, размах дает представление о разбросе числовых данных, то есть показывает максимальное значение, на которое числа в некотором наборе отличаются друг от друга.

Например, из приведенной выше таблицы выпуска мопедов мы можем сделать следующие выводы:

- 1) наименьшее ежегодное производство мопедов в 1999–2008 гг. равно 768, а наибольшее – 4816;
 - 2) размах данного числового набора составляет $4816 - 768 = 4048$ мопедов.
- Рассмотрим теперь следующую задачу.

Задача 1.

В результате диспансеризации, проведенной в седьмых классах, школьный врач получил следующую информацию о весе семиклассников:

Вес, кг	Количество учащихся с указанным весом	Вес, кг	Количество учащихся с указанным весом
35	1	45	3
36	1	46	3
38	3	47	2
39	1	48	3
40	3	49	1
41	3	50	3
42	3	51	1
43	3	52	1
44	14	55	1

Вычислите средний арифметический вес семиклассников в этой школе, наибольшее и наименьшее значение их веса, размах в указанном числовом наборе.

Решение:

Наименьшее значение веса семиклассников равно 35 кг, наибольшее – 55 кг, а размах числового набора равен разности между наибольшим и наименьшим значением, то есть $55 - 35 = 20$ кг.

Для того чтобы найти среднее арифметическое, надо вычислить общий вес всех семиклассников и разделить его на число семиклассников.

Общий вес всех семиклассников равен:

$$(35 + 36 + 39 + 49 + 51 + 52 + 55) \cdot 1 + 47 \cdot 2 + (38 + 40 + 41 + 42 + 43 + 45 + 46 + 48 + 50) \cdot 3 + 44 \cdot 14 = 317 + 94 + 1179 + 616 = 2206 \text{ (кг)}.$$

Количество семиклассников равно 50. Значит, среднее арифметическое равно

$$\frac{2206}{50} = 44,12 \text{ (кг)}$$

Ответ: средний арифметический вес семиклассников равен 44,12 кг.

В данной задаче в таблице весов также обращает на себя внимание значение 44 кг, так как в отличие от других значений веса оно встречается чаще всего – у 14 учащихся. Такую статистическую характеристику, дающую представление о наиболее часто встречающемся в числовом наборе значении, также бывает важно знать. Ее называют *модой набора чисел*.



Определение 3. *Модой набора чисел* называется число, наиболее часто встречающееся в числовом наборе.

У набора чисел может не быть моды, если все числа в наборе встречаются одинаковое число раз.

Так, например, в наборе чисел, характеризующем ежегодный выпуск мопедов в РФ с 1999 по 2008 г., моды нет, так как все числа встречаются в нем по одному разу.

В некотором наборе чисел может быть несколько мод. Действительно, в наборе чисел:

$$1, 9, 39, 39, 9, 45, 58$$

две моды – число 9 и число 39, так как и то и другое число встречаются в указанном наборе по два раза. А остальные числа встречаются лишь один раз.

На практике вычисление среднего арифметического, наибольшего и наименьшего значения, размаха и моды наборов чисел мы производим очень часто.

Так, мы определяем, кто пробежал дистанцию быстрее, а кто медленнее и какой была разница между этими результатами. Тем самым мы вычисляем наибольшее и наименьшее значения и размах числового набора. Нам интересно, каких оценок за контрольную было больше всего, и тем самым мы вычисляем моду набора чисел. А получив, например, на соревнованиях команд школьного КВН различные оценки пяти судей, нас интересует средний балл, который мы в итоге заработали, поэтому мы вычисляем среднее арифметическое полученных оценок.



Тем не менее рассмотренных нами статистических характеристик иногда бывает недостаточно для того, чтобы получить интересующую нас информацию о числовом наборе. Рассмотрим, например, следующую задачу.

Задача 2.

Пять авиакомпаний предлагают следующие цены на билет от Москвы до Киева.

Название авиакомпании	Стоимость билета
«Аэросвит»	3500 р.
«Белавиа»	3965 р.
«Трансаэро»	5050 р.
«Сибирь»	7515 р.
«Аэрофлот»	7945 р.

Какая авиакомпания предлагает билет из Москвы в Киев по средней цене и сколько он стоит?

Решение:

Стоимость билетов, предлагаемых различными авиакомпаниями, образует следующий набор чисел:

3500; 3965; 5050; 7515; 7945.

Среднее арифметическое указанного числового набора равно:

$$(3500 + 3965 + 5050 + 7515 + 7945) : 5 = 27\,975 : 5 = 5595.$$

Однако по цене 5595 р. ни одна компания не продает билеты. Тем не менее на вопрос задачи мы сразу можем ответить. Очевидно, что билет по средней цене предлагает компания Трансаэро. Ведь среди указанных предложений пяти компаний два билета стоят меньше, чем билет Трансаэро, а два других – больше.

Ответ: билет по средней цене стоимостью 5050 р. предлагает компания Трансаэро.

Полученный нами при решении задачи результат приводит нас к еще одной статистической характеристике набора чисел, называемой *медианой*. Способ нахождения медианы числового набора и ее определение зависят от того, четно или нечетно количество чисел в наборе.

Определение 4. Медианой набора, состоящего из нечетного количества чисел, называют число, расположенное на месте с номером $(n - 1) : 2 + 1$ после упорядочивания данного числового набора по возрастанию (n – количество чисел в наборе).

Для того чтобы понять, как находить медиану в этом случае, рассмотрим следующую задачу.

Задача 3.

Найдите медиану числового набора: 567; 214; 27; 789; 415; 1023; 599.

Решение:

В указанном наборе 7 чисел. Значит, $n = 7$ и n – нечетно.

Расположим числа набора в порядке возрастания:

Число	27	214	415	567	599	798	1023
Место	1	2	3	4	5	6	7

На месте с номером $(7 - 1) : 2 + 1 = 4$ находится число 567. Значит, по определению, медианой этого набора является число 567.

Ответ: 567.

Определение 5. Медианой набора, состоящего из четного количества чисел, называют число, равное среднему арифметическому чисел, стоящих на местах $n : 2$ и $n : 2 + 1$, после упорядочивания данного числового набора по возрастанию (n – количество чисел в наборе).

Рассмотрим задачу, иллюстрирующую алгоритм нахождения медианы числового набора в этом случае.

Задача 4.

Найдите медиану числового набора: 923; 138; 915; 6; 13; 57; 149; 61.

Решение:

В указанном наборе 8 чисел. Значит, $n = 8$ и n – четно. Расположим числа набора в порядке возрастания:

Число	6	13	57	61	138	149	915	923
Место	1	2	3	4	5	6	7	8

На месте с номерами $8 : 2 = 4$ и $8 : 2 + 1 = 5$ находятся числа 61 и 138. Найдем их среднее арифметическое:

$$(61 + 138) : 2 = 99,5.$$

Значит, по определению, медианой этого набора является число 99,5.

Ответ: 99,5.

В результате мы приходим к следующему алгоритму.

Алгоритм нахождения медианы набора чисел

1. Определить n – количество чисел в наборе.
2. Записать числа набора в порядке возрастания.
3. Пронумеровать подряд все числа упорядоченного набора, обозначив номером 1 меньшее число. Полученные номера – это места чисел в наборе.
4. Если n – нечетно, то медиана равна числу, расположенному в упорядоченном наборе на месте с номером $(n - 1) : 2 + 1$.
5. Если n – четно, то медиана равна среднему арифметическому чисел, стоящих в упорядоченном наборе на местах с номерами $n : 2$ и $n : 2 + 1$.
6. Записать ответ.

Заметим, что если в числовом наборе имеются одинаковые числа, то способ нахождения медианы не изменится. Просто при упорядочивании набора мы должны будем записать одинаковые числа одно за другим.

Нахождение медианы числового набора бывает полезно в тех случаях, когда необходимо определить среднюю цену, по которой продается некоторый товар в магазинах; компанию, получившую среднюю прибыль за год среди всех компаний некоторой промышленной отрасли; спортсмена, показавшего средний результат, и т.д.



К

699 Вычислите с точностью до десятых среднее арифметическое чисел:

- а) 26, 35, 37, 42, 43; в) 12, 32, 44, 68, 95, 112, 139, 215;
 б) 8, 48, 51, 63, 78, 95; г) 8, 24, 25, 31, 32, 33, 48, 52, 69, 72, 85.

700

1) В таблице приведены данные о ежегодном производстве в Российской Федерации в 1998–2008 гг. паровых турбин в штуках.

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Турбины паровые	26	25	19	19	28	26	32	37	24	35	38

Вычислите среднее годовое производство паровых турбин с точностью до единиц.

2) Какие еще характеристики указанного набора чисел вы могли бы предложить? Сравните свои варианты со статистическими характеристиками, приведенными в учебнике на стр. 157–160.

701

В таблице представлена информация о численности (млн. человек) постоянного населения в некоторых регионах Российской Федерации на 1 января 2002–2009 гг.

Год	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Владимирская область	1,54	1,52	1,50	1,49	1,47	1,46	1,45	1,44
Ивановская область	1,16	1,14	1,13	1,11	1,10	1,09	1,08	1,07
Костромская область	0,74	0,73	0,73	0,72	0,71	0,70	0,70	0,69
Курская область	1,25	1,23	1,21	1,20	1,18	1,17	1,16	1,16
Московская область	6,61	6,62	6,62	6,63	6,63	6,65	6,67	6,71
Орловская область	0,87	0,86	0,85	0,84	0,83	0,83	0,82	0,82
Смоленская область	1,06	1,05	1,03	1,02	1,01	0,99	0,98	0,97
Тверская область	1,49	1,47	1,44	1,43	1,41	1,39	1,38	1,37
Ярославская область	1,38	1,36	1,35	1,34	1,33	1,32	1,32	1,31
г. Москва	10,27	10,39	10,39	10,41	10,43	10,44	10,47	10,51

1) Вычислите среднегодовую численность населения (с точностью до сотых миллиона) в каждом из представленных регионов за 2002–2009 гг.

2) Вычислите среднее число жителей в каждом из этих регионов:

- а) в 2003 г.; б) в 2006 г.; в) в 2008 г.; г) в 2009 г.

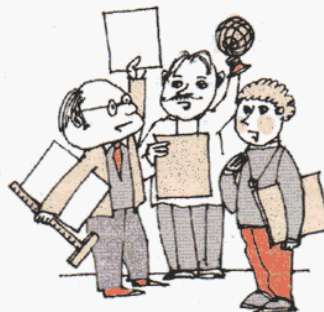
3) В какие годы численность населения была наибольшей, а в какие – наименьшей в следующих регионах:

- а) в Ивановской области; в) в Орловской области;
 б) в Московской области; г) в Москве.

4) Вычислите размах численности населения:

- а) в указанных регионах в 2002 г.;
 б) в указанных регионах в 2009 г.;

- в) в Московской области в 2002–2009 гг.;
 г) в Ярославской области в 2003–2008 гг.
 5) Вычислите моду численности населения в каждом из представленных регионов в 2002–2009 гг.
 6) Вычислите медиану численности населения в указанных регионах в 2002–2009 гг.



702

В таблице приведены данные о производстве в Российской Федерации сгущенного молока с сахаром (в млн. банок) в 2001–2008 гг.

Год	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Молоко сгущенное с сахаром, млн. банок	275	306	361	419	456	471	485	492

В результате анализа представленной информации были вычислены следующие статистические характеристики:

- а) 492; б) 275; в) 217; г) 408,5; д) 439.

Определите, какую статистическую характеристику могли вычислять в каждом из пунктов.

703

а) В течение учебного года Коля несколько раз участвовал в соревнованиях по прыжкам в длину. По итогам всех соревнований он показал следующие результаты:

Результат	3м 80 см	3м 90 см	4 м	4м 10 см	4м 20 см	4м 30 см	4м 40 см
Количество раз	2	5	4	7	3	3	1

Найдите средний результат Коли по прыжкам в длину (с точностью до единиц сантиметров), моду, размах и медиану представленного числового набора.

б) Шесть подружек, Катя, Маша, Таня, Полина, Настя и Наташа, собирали в течение года открытки. Катя собрала 56 открыток, Маша – 48, Таня – 35, Полина – 48, Настя – 62, а Наташа – 36. Найдите среднее арифметическое собранных девочками открыток (с точностью до единиц), моду, размах и медиану представленного числового набора.



в) В социологическом опросе приняли участие 275 человек. На вопрос: «Сколько детей, по вашему мнению, должно быть в семье?» – были получены следующие ответы:

Количество детей	0	1	2	3	4
Количество человек, выбравших этот ответ	4	12	166	87	6

Найдите среднее арифметическое (с точностью до единиц), моду, размах и медиану представленного числового набора.

г) В социологическом опросе приняли участие 310 человек. На вопрос: «Сколько раз в неделю вы занимаетесь спортом?» – были получены следующие ответы:

Количество раз в неделю	0	1	2	3	4
Количество человек, выбравших этот ответ	55	82	75	46	52

Найдите среднее арифметическое (с точностью до десятых), моду, размах и медиану представленного числового набора.

704

1) Зарплатная ведомость компании, занимающейся фасовкой сушеных морепродуктов, выглядит следующим образом:

№ п/п	ФИО	Зарплата к получению	№ п/п	ФИО	Зарплата к получению
1	Алдошина Е.А.	20 100 р.	7	Мысина И.И.	35 200 р.
2	Балькина В.Н.	19 400 р.	8	Плотникова А.Н.	29 300 р.
3	Баранов Т.И.	18 100 р.	9	Соловьев Ю.А.	95 600 р.
4	Емельянов А.Г.	35 200 р.	10	Старикова Ю.Г.	19 400 р.
5	Казанцева И.С.	67 300 р.	11	Федоров А.Д.	48 400 р.
6	Киришкин Л.С.	21 500 р.	12	Чернов П.К.	56 200 р.

а) Вычислите среднюю зарплату (с точностью до копеек), моду, размах и медиану представленного числового набора.

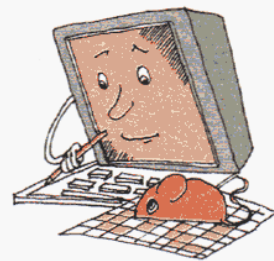
б) Какой стала бы средняя зарплата, мода, размах и медиана, если бы все зарплаты увеличились в 2 раза, уменьшились в 1,5 раза?

2) В интернет-магазине продаются ноутбуки по следующим ценам (в долларах):

Модель №	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Цена	699	890	950	990	1099	890	1199	699	1299

а) Вычислите среднюю цену ноутбука в этом интернет-магазине (с точностью до копеек), моду, размах и медиану представленного числового набора.

б) Какой стала бы средняя цена, мода, размах и медиана, если бы все цены увеличились в 4 раза, уменьшились в 2,5 раза?



π

705

Сформулируйте утверждения, обратные к данным, и определите истинность прямых и обратных утверждений. Для ложных высказываний постройте их отрицания и убедитесь в истинности отрицаний.

а) Если $c > a$ и $c > b$, то $c > a + b$;

д) Если $a < b$, то $11 - 2a < 11 - 2b$;

б) Если $x + 5 < 7$, то $x < 7$;

е) Если $|x - 5| < 4$, то $x < 9$;

в) Если $2x + 4 > 6$, то $x \geq 3$;

ж) Если $|x - 3| > 2$, то $x < 1$;

г) Если $a > b$, то $6a + 9 > 6b + 9$;

з) Если $a \geq 0$, то $|a + 1| + 5 > 0$.

706 Известно, что целое число a делится на целое число b . Сократима ли дробь:

а) $\frac{7a-2b}{4a+3b}$; б) $\frac{3a^2+2ab}{5ab-7b^2}$; в) $\frac{a-2b+5a^2}{3b^2-b}$; г) $\frac{4a^2+2b}{2a-9b^2}$?

707 Решите неравенство:

а) $\frac{4x-3}{5} > \frac{7x+2}{3}$; в) $\frac{3x+2}{2} - 5 \leq \frac{4x+1}{3} - 7$;
 б) $\frac{4-3y}{7} < \frac{2+y}{5}$; г) $\frac{2y-3}{4} - 5 \geq \frac{y+2}{3} - 4$.

708 Постройте математическую модель и решите задачу:

- а) Сумма двух натуральных чисел равна 17. Первое число при делении на 9 дает остаток 3, а второе число при делении на 9 дает остаток 5. Найдите эти числа.
 б) Величина первого угла треугольника на 10° больше второго и в два раза меньше третьего. Найдите величину большего угла этого треугольника.
 в) Длина ломаной $ABCD$ равна 16 см. Известно, что длина AB равна трети расстояния между ее началом и концом, BC — на 0,8 см больше AB , а CD — на 1,8 см меньше BC . Чему равна длина звена AB этой ломаной?
 г) Сумма цифр загаданного четырехзначного числа равна 22. Вторая цифра этого числа на 1 больше первой, третья — в 4 раза больше второй, а четвертая — на 3 больше первой. Какое число загадали?

709 Разложите многочлен на множители:

а) $8a^5b^2 + 16a^6b + 8a^7$; г) $16c^2 - 9d^2 + 36dk - 36k^2$;
 б) $12p^4q^2 - 36p^3q^3 + 27p^2q^4$; д) $ab - 2bc - a^2 + 4ac - 4c^2$;
 в) $25r^2 - 10rs + s^2 - 64$; е) $s^2 + 2st + t^2 - 4k^2 - 12kc - 9c^2$.

710 Постройте график кусочно-линейной функции:

а) $y = \begin{cases} 3x-1, & \text{если } x \geq 0; \\ -1, & \text{если } -2 \leq x < 0; \\ 2x+3, & \text{если } x < -2 \end{cases}$ в) $y = \begin{cases} 2x-1, & \text{если } x \geq -1; \\ 4x+1, & \text{если } -2 \leq x < -1; \\ -9-x, & \text{если } x < -2 \end{cases}$
 б) $y = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \geq 1; \\ 2-4x, & \text{если } -1 \leq x < 1; \\ -x+5, & \text{если } x < -1 \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} -x+5, & \text{если } x \geq 2; \\ 3x-3, & \text{если } 0 \leq x < 2; \\ -3, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

711 а) Наташа пронумеровала подряд, начиная с первой, все страницы своего блокнота из 48 листов. Ее брат Ваня вырвал из ее блокнота 17 листов и сложил без ошибок номера указанных на них страниц. Может ли он получить в сумме число 324?

б) Катя разложила свои 456 фотографий в альбом по 4 фотографии на страницу и пронумеровала их все подряд, начиная с первой. Затем она верно посчитала сумму номеров фотографий на 9 подряд идущих страницах своего альбома. Могла ли она получить в сумме число 4213?



712 Постройте графики функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |x + 3| - |x - 4|$;

в) $f(x) = -|7 - x| - |x - 9|$;

б) $f(x) = |x - 5| + |2 - x|$;

г) $f(x) = |x + 6| - |8 - x|$.

Д

713 В таблице приведены данные о ежегодном производстве в Российской Федерации в 1998–2008 гг. электрических плит (тыс. штук).

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Плиты электрические	192	288	343	346	339	535	522	556	459	454	443

Вычислите среднее годовое производство электрических плит (с точностью до тысяч), моду, размах и медиану представленного числового набора.

714

В таблице представлена информация о количестве государственных и муниципальных высших учебных заведений в федеральных округах Российской Федерации на 1 января 2002–2009 гг.

Федеральный округ	Годы							
	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Центральный	197	200	203	204	206	209	212	212
Северо-Западный	74	74	76	75	77	77	78	79
Южный	80	80	81	79	80	77	77	77
Приволжский	118	121	124	123	121	120	119	120
Уральский	54	53	53	51	52	53	53	53
Сибирский	86	85	86	85	86	84	84	84
Дальневосточный	46	39	39	38	38	38	37	37

1) Вычислите среднее количество высших учебных заведений (с точностью до единиц) в каждом из представленных федеральных округов за 2002–2009 гг.

2) Вычислите с точностью до единиц среднее количество высших учебных заведений в каждом из указанных федеральных округов в:

а) 2002 г.; б) 2005 г.; в) 2007 г.; г) 2009 г.

3) В каком году количество высших учебных заведений было наибольшим, а в каком – наименьшим в федеральных округах: а) Центральном; б) Северо-Западном?

4) Вычислите размах количества высших учебных заведений:

а) в указанных федеральных округах в 2002 г., 2009 г.;

б) в Приволжском федеральном округе в 2002–2009 гг.

5) Вычислите моду количества высших учебных заведений в каждом из представленных федеральных округов в 2002–2009 гг.

6) Вычислите медиану количества высших учебных заведений в указанных федеральных округах в 2002–2009 гг.



- 715** В таблице приведены данные о производстве в Российской Федерации кукурузных палочек (в тоннах) в 1997–2006 гг.

Год	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Кукурузные палочки	6086	7307	5378	4982	5944	5715	6186	5970	6385	5657

В результате анализа представленной информации были вычислены следующие статистические характеристики:

- а) 4982; б) 7307; в) 5961; г) 5957; д) 2325.

Определите, какую статистическую характеристику могли вычислять в каждом из пунктов.

- 716** а) В течение учебного года Ирина несколько раз участвовала в соревнованиях по метанию мяча. По итогам всех соревнований она показала следующие результаты:

Результат	24 м	25 м	26 м	28 м	29 м	31 м	32 м
Количество раз	1	6	4	8	9	5	1

Найдите средний результат Ирины по метанию мяча (с точностью до десятых метра), моду, размах и медиану представленного числового набора.

б) Пять друзей – Ваня, Саша, Валера, Гоша и Антон – собирали в течение года значки. Ваня собрал 45 значков, Саша – 59, Валера – 63, Гоша – 59, а Антон – 54. Найдите среднее арифметическое собранных мальчиками значков, моду, размах и медиану представленного числового набора.

- 717** В интернет-магазине продаются MP3-плееры по следующим ценам:

Модель	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Цена, руб.	1190	1490	1590	1190	1990	1590	1890	2190	1590

1) Вычислите среднюю цену (с точностью до копеек) MP3-плеера в этом интернет-магазине, моду, размах и медиану представленного числового набора.

2) Какой стала бы средняя цена, мода, размах и медиана, если бы все цены увеличились в 2,5 раза, уменьшились в 3 раза?

- 718** Известно, что целое число a делится на целое число b . Сократима ли дробь?

- а) $\frac{3a - 5b}{5a + 3b}$; б) $\frac{11a^2 + ab}{2ab - 9b^2}$;
в) $\frac{3a - b + 12a^2}{4b^2 - 5b}$; г) $\frac{9a^2 + 3b}{5a - 8b^2}$.

- 719** Решите неравенство:

- а) $\frac{2x - 1}{3} > \frac{3x + 5}{2}$; в) $\frac{4x + 1}{3} + 9 \leq \frac{5x - 9}{3} + 12$;
б) $\frac{3 - 8y}{5} < \frac{7 + y}{3}$; г) $\frac{3y - 6}{4} - 2 \geq \frac{2y + 1}{3} - 3$.



720 Постройте математическую модель и решите задачу:

а) Сумма двух натуральных чисел равна 38. Первое число при делении на 11 дает остаток 7, а второе число при делении на 11 дает остаток 9. Найдите эти числа.

б) Величина первого угла треугольника на 40° меньше второго и в три раза больше третьего. Найдите величину большего угла этого треугольника.

721 Постройте график кусочно-линейной функции:

$$а) y = \begin{cases} 6x - 2, & \text{если } x \geq 1; \\ -x + 5, & \text{если } -2 \leq x < 1; \\ x + 9, & \text{если } x < -2 \end{cases}$$

$$б) y = \begin{cases} 4x + 1, & \text{если } x \geq -1; \\ -2x - 3, & \text{если } -3 \leq x < -1; \\ x + 6, & \text{если } x < -3 \end{cases}$$



722 Разложите многочлен на множители:

а) $8a^2b^4 + 8ab^5 + 2b^6$;

г) $81c^2 - d^2 + 16dk - 64k^2$;

б) $18c^6d^4 - 12c^5d^5 + 2c^4d^6$;

д) $3ab - ac - 9b^2 + 6bc - c^2$;

в) $16r^2 - 24rs + 9s^2 - 49$;

е) $s^2 + 4st + 4t^2 - k^2 - 10kc - 25c^2$.

723 Ольга разложила свои 570 марок в альбом по 6 марок на страницу и пронумеровала их все подряд, начиная с первой. Затем она верно посчитала сумму номеров марок на 11 подряд идущих страницах своего альбома. Могла ли она получить в сумме число 6512?

724 Постройте графики функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |x + 4| - |x - 7|$;

б) $f(x) = -|10 - x| - |x - 1|$.

725 Решите уравнение $|x + a| - |x + b| = c$:

$$a = \frac{12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3} \cdot 2\frac{4}{7}}; \quad b = \frac{(1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{3}{4}) \cdot 3\frac{3}{5}}{14 - 15\frac{1}{8} : 2\frac{1}{5}}; \quad c = \frac{19}{99} + \frac{2\frac{3}{8} : \frac{3}{4} + 24\frac{7}{9}}{7\frac{1}{8} - 157\frac{4}{5} : 24}.$$

726* Задумали два натуральных числа. Третье число получили, сложив первое и второе число. Четвертое число получили, сложив второе и третье. Таким же образом получили пятое, шестое и седьмое число. Найдите сумму всех полученных семи чисел, если шестое число оказалось равно 16.

727* Пятеро друзей купили видеокамеру. Первый заплатил половину суммы, заплаченной остальными. Второй — треть суммы, заплаченной остальными. Третий — четверть суммы, заплаченной остальными. Четвертый — пятую часть суммы, заплаченной остальными, а пятый заплатил 450 р. Сколько стоила видеокамера?



§ 3. Элементы теории вероятностей

1. Частота и вероятность случайных событий



Я глубоко почитаю математику, потому что знакомые с нею видят в ней средство к пониманию всего существующего.

Бхаскара (1114–1185),
индийский математик и астроном

В жизни происходит множество самых разнообразных событий. Некоторые из них происходят независимо друг от друга, другие же взаимосвязаны. Так, если сегодня, например, первое мая, то мы можем с абсолютной уверенностью сказать, что завтра будет второе мая, а послезавтра – третье мая. События, в наступлении которых мы уверены, называются в математике *детерминированными событиями*.

Однако чаще мы имеем дело с событиями, наступление которых мы не можем предсказать. Например, если сегодня солнечный день, то мы не можем с абсолютной уверенностью утверждать, даже опираясь на метеопрогноз, что завтра будет солнечно или, наоборот, пасмурно. Подбрасывая монету, мы не можем точно знать, что выпадет – «орел» или «решка». События, результат которых зависит от случая, называют *случайными событиями*.

Наука, изучающая случайные события и закономерности их поведения, называется *теорией вероятностей*.

Исследуя различные события, мы прежде всего интересуемся тем, насколько часто то или иное событие приводит нас к нужному результату. Чтобы определить частоту появления того или иного случайного события, мы будем многократно повторять наш опыт и наблюдать за тем, какие результаты будут получаться. При этом анализ частоты имеет смысл только тогда, когда все опыты проводятся в одних и тех же условиях.

Такие опыты в теории вероятностей называются *испытаниями*, а результаты этих испытаний – *исходами*. Если в результате испытания мы получим желаемый результат, то мы будем называть его *благоприятным исходом*. Например, с точки зрения теории вероятностей, шахматная партия – это испытание, результат партии (выигрыш, проигрыш или ничья) – это исход, а наш выигрыш – это благоприятный для нас исход.

Чтобы вычислить частоту случайного события, необходимо количество благоприятных исходов в серии испытаний разделить на общее количество проведенных испытаний.

Определение 1. Частотой случайного события называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу проведенных испытаний.

Для того чтобы потренироваться в нахождении частоты случайного события, решим следующую задачу.

Задача.

Игральный кубик подбросили 100 раз. При этом число 1 выпало 20 раз, число 2 – 15 раз, число 3 – 25 раз, число 4 – 10 раз, число 5 – 12 раз, а число 6 – 18 раз. Вычислите частоту наступления следующих случайных событий:

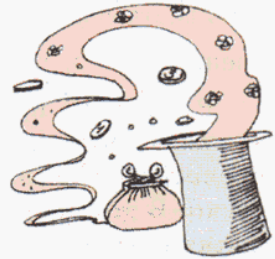
- а) выпадение числа 1; в) выпадение числа 3; д) выпадение числа 5;
б) выпадение числа 2; г) выпадение числа 4; е) выпадение числа 6.

Решение:

Для решения задачи удобно использовать следующую таблицу:

Случайное событие	Общее число испытаний	Число благоприятных исходов	Частота случайного события
Выпадение числа 1	100	20	0,2
Выпадение числа 2	100	15	0,15
Выпадение числа 3	100	25	0,25
Выпадение числа 4	100	10	0,1
Выпадение числа 5	100	12	0,12
Выпадение числа 6	100	18	0,18

Заметим, что частота одного и того же случайного события будет зависеть от количества проведенных испытаний. Так, например, если при подбрасывании монеты «решка» выпадает 4 раза в серии из 10 испытаний, то частота ее выпадения равна 0,4. Если же «решка» выпадает 54 раза в серии из 100 испытаний, то частота этого события будет равна уже 0,54. Увеличивая количество испытаний, можно заметить, что частота выпадения «решки» будет все ближе к 0,5. Число 0,5, или $\frac{1}{2}$, называют в данном случае *вероятностью* выпадения «решки» при подбрасывании монеты.



Вообще, *вероятность некоторого случайного события A* – это числовая характеристика возможности наступления события A в условиях, которые могут быть воспроизведены неограниченное количество раз.

Вероятность события принято обозначать буквой P. Например, вероятность события A записывают как P(A).

Каким же образом можно вычислить вероятность события?

В рассмотренном примере при бросании монеты возможны только два исхода: выпадает «орел» (событие A) или выпадает «решка» (событие B). При этом если монета «идеальна», то есть абсолютно симметрична, то возможности реализации того или другого исходов одинаковые: половина на половину. Поэтому, как мы уже видели,

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично при бросании «идеального» игрального кубика существует шесть исходов. И так как возможность реализации каждого из этих исходов одинакова, то вероятность каждого из них, например, выпадения числа 5, равна $\frac{1}{6}$.

Определение 2. Случайные события, вероятность наступления которых одинакова, называют **равновозможными**.

Обобщая закономерность, которую мы наблюдали, приходим к выводу:

Правило вычисления вероятности равновозможных событий

Если результатом некоторого испытания могут быть лишь n равновозможных исходов, то вероятность каждого из исходов равна $\frac{1}{n}$.

Например, вероятность угадывания одного из 32 загаданных чисел равна $\frac{1}{32}$, а вероятность того, что ученик на экзамене вытащит один «желанный» билет из 58 возможных, равна $\frac{1}{58}$.

Заметим, что частота и вероятность одного и того же случайного события связаны между собой. Так, частота случайного события в серии из большого числа испытаний будет близка к вероятности этого события. Поэтому по значению вероятности случайного события мы можем сделать предположение о приблизительном значении частоты его появления в серии испытаний, и наоборот.

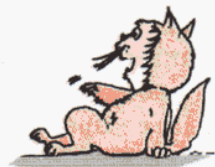
Вместе с тем, зная, например, что при бросании игрального кубика вероятность выпадения числа 5 равна $\frac{1}{6}$, мы не можем сделать вывод о том, что число 5 будет выпадать при каждом шестом броске. Может оказаться, что пятерка не будет выпадать достаточно долго, а потом выпадет несколько раз подряд. Но если кубик бросать очень много раз, то частота выпадения числа 5 будет близка к $\frac{1}{6}$.

В реальной практике и кубик, и монета, да и другие предметы далеки от «идеальных». А значит, исходы событий уже не будут равновозможными. Поэтому вычислить точное значение вероятности такого случайного события удастся достаточно редко. В этом случае вероятность вычисляют приближенно. Для этого проводят испытание достаточно много раз, вычисляют частоту появления случайного события, которая и будет являться приближенным значением вероятности этого события.

К

728 Игральный кубик подбросили 770 раз. При этом число 1 выпало 158 раз, число 2 – 100 раз, число 3 – 115 раз, число 4 – 146 раз, число 5 – 129 раз, а число 6 – 122 раза. Используя калькулятор, вычислите (с точностью до сотых) частоту наступления следующих случайных событий:

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| а) выпадение числа 1; | г) выпадение числа 4; |
| б) выпадение числа 2; | д) выпадение числа 5; |
| в) выпадение числа 3; | е) выпадение числа 6. |

**729**

а) Проведите 20 испытаний по подбрасыванию монеты в 1 р. и запишите, сколько раз у вас выпал «орел» и сколько раз выпала «решка». Используя калькулятор, вычислите с точностью до сотых частоту выпадения «орла» в проведенной серии испытаний.

б) Проведите 40 испытаний по подбрасыванию монеты в 1 р. и запишите, сколько раз у вас выпал «орел» и сколько раз выпала «решка». Вычислите частоту выпадения «орла» в проведенной серии испытаний. Как изменилась частота выпадения «орла»? Сравните свои результаты с результатами ваших одноклассников.

в) Занесите результаты всех испытаний по подбрасыванию монеты в ваш класс в одну таблицу и вычислите с точностью до сотых частоту выпадения «орла». Как изменилась частота? Что вы замечаете?

730

а) При проведении социологического опроса был задан вопрос: «Кто является вашим любимым русским композитором?» Ответ «Петр Ильич Чайковский» выбрали 78 человек. После подсчета оказалось, что частота данного ответа среди всех ответов, полученных на данный вопрос, равна 0,26. Сколько человек принимало участие в этом опросе? Сколько человек назвали других композиторов?

б) При проведении социологического опроса был задан вопрос: «Какой вид отдыха вы предпочитаете?» Ответ «туризм» выбрало 85 человек. После подсчета оказалось, что частота данного ответа среди всех ответов, полученных на данный вопрос, равна 0,17. Сколько человек принимало участие в этом опросе? Сколько человек назвали другие виды отдыха?

731

а) Вероятность угадать 1 цифру из 37 равна примерно 0,03 (с точностью до сотых). Можно ли утверждать, что, сделав 100 попыток, мы угадаем загаданное число?

б) В 2002 году было вычислено, что вероятность дожить до возраста 80–90 лет у мужчин равна 0,25. Оцените, какое примерно количество мужчин из 10 млн. доживет до указанного возраста.

в) Мама купила Маше 3 заколки, одна из которых оказалась сломанной. Можно ли на основании этой информации утверждать, что вероятность купить сломанную заколку равна $\frac{1}{3}$?

г) В результате многочисленных наблюдений над новорожденными было вычислено, что вероятность рождения девочки с точностью до сотых равна 0,49. Оцените, сколько девочек можно ожидать среди 10 000 новорожденных.

д) При проверке качества продукции на шоколадной фабрике среди 1000 шоколадок было выявлено 5 шоколадок, не соответствующих требованиям качества. Можно ли утверждать, что:

- Среди любых 200 шоколадок 1 шоколадка бракованная?
- Среди любых 200 шоколадок нет бракованных?

732

В задании приведен отрывок из романа «Золотой теленок» Ильи Ильфа и Евгения Петрова, содержащий 583 буквы. Используя калькулятор, вычислите (с точностью до тысячных) частоту появления букв «О», «И», «Т», «К». Сравните полученные результаты с таблицей частот букв русского алфавита, приведенной на стр. 22 части 3 учебника. Почему полученные вами частоты не совпадают с данными, приведенными в таблице?

«Пешеходов надо любить. Пешеходы составляют большую часть человечества. Мало того – лучшую его часть. Пешеходы создали мир. Это они построили города, возвели многоэтажные здания, провели канализацию и водопровод, замостили улицы и осветили их электрическими лампами. Это они распространили культуру по всему свету, изобрели книгопечатание, выдумали порох, перебросили мосты через реки, расшифровали египетские иероглифы, ввели в употребление безопасную бритву, уничтожили торговлю рабами и установили, что из бобов сои можно изготовить сто четырнадцать вкусных питательных блюд. И когда все было готово, когда родная планета приняла сравнительно благоустроенный вид, появились автомобилисты».

733

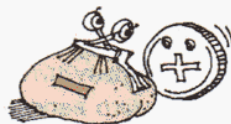
Являются ли равновероятными события A и B :

- а) A : при бросании идеального игрального кубика выпало число 2;
 B : при бросании идеального игрального кубика выпало число 5.
- б) A : при бросании идеального игрального кубика выпало нечетное число;
 B : при бросании идеального игрального кубика выпало четное число.
- в) A : при бросании идеального игрального кубика выпало число, делящееся на 3;
 B : при бросании идеального игрального кубика выпало число, не делящееся на 3.
- г) A : Миша выиграл 100 р. при игре в моментальную лотерею;
 B : Миша не выиграл 100 р. при игре в моментальную лотерею.
- д) A : Наташа угадала одну из 34 цифр, загаданную ее подругой;
 B : Наташа не угадала одну из 34 цифр, загаданную ее подругой.
- е) A : из 30 экзаменационных билетов мне попадет счастливый билет № 5;
 B : из 30 экзаменационных билетов мне попадет несчастливый билет № 22.

734

Чему равна вероятность:

- а) Купить выигрышный билет мгновенной лотереи, если известно, что каждый 100-й билет содержит выигрыш?
- б) Вытащить на экзамене билет № 3, если всего билетов 24?
- в) Взять наугад нужную книгу с полки, на которой стоит 50 книг?
- г) Угадать одно число из 49?
- д) Выбрать, не глядя, из 10 разноцветных шаров шар определенного цвета?
- е) Выбросить комбинацию «орел» – «решка» при подбрасывании двух идеальных монет?



735

а) Сколько различных комбинаций «орлов» и «решек» может выпасть при одновременном подбрасывании трех идеальных монет? Запишите все возможные исходы данного испытания.

б) Проведите 40 испытаний и внесите результаты проведенных испытаний в таблицу, в первой строке которой укажите все возможные исходы, во второй – общее количество проведенных испытаний, в третьей – количество испытаний, завершившихся указанным исходом, а в четвертой строке вычислите с точностью до сотых частоту появления каждого исхода (используйте калькулятор).

в) Составьте общую таблицу, внося в нее результаты испытаний, проведенных вашими одноклассниками. Что вы замечаете?

г) Являются ли при одновременном бросании трех монет равновероятными событиями выпадение каждой из комбинаций?

д) Чему равна вероятность выпадения комбинации «орел» – «орел» – «решка»?

π

736

Используя диаграммы Эйлера–Венна, определите правильность логического вывода:

а) Если некоторые четные числа больше 3, то некоторые большие трех числа – четные.

б) Если ни одно решение неравенства $|x + 2| < 5$ не является решением неравенства $x > 7$, то ни одно решение неравенства $x > 7$ не является решением неравенства $|x + 2| < 5$.

в) Если все решения неравенства $x - 4 > 8$ положительные числа и некоторые положительные числа делятся на 7, то некоторые делящиеся на 7 числа – решения неравенства $x - 4 > 8$.

г) Если все неравенства вида $kx + b < cx + d$ линейные и некоторые линейные неравенства имеют более пяти решений, значит, некоторые неравенства вида $kx + b < cx + d$ имеют более пяти решений.

д) Если ни одно решение неравенства $|x - 2| < 6$ не больше 10, а некоторые большие 10 числа делятся на 5, значит, некоторые делящиеся на 5 числа не являются решениями неравенства $|x - 2| < 6$.

е) Если все положительные числа являются рациональными и ни одно положительное число не может быть меньше нуля, значит, все рациональные числа не могут быть меньше нуля.

737 Существует ли такое целое число, которое:

- а) при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 18 дает остаток 15;
- б) при делении на 7 дает остаток 6, а при делении на 21 дает остаток 12;
- в) делится на 11, а при делении на 22 дает остаток 13;
- г) делится на 9, а при делении на 54 дает остаток 43?

738 а) Лыжник пробежал 15 км, что составило 60% всей дистанции. Сколько километров составляет вся дистанция?

б) В театре 300 мест. На спектакль продали 250 билетов. Какой процент свободные места составят от общего количества мест, если на сеанс придут лишь 80% зрителей, купивших билеты?

в) При проведении распродажи цену на мобильный телефон установили в размере 11 203 р. Сколько стоил мобильный телефон до распродажи, если размер скидки составил 15%?

г) В произведении трех чисел первый множитель увеличили на 30%, второй увеличили на 45%, а третий уменьшили на 50%. Как изменилось произведение?

739 Зависимость y от x задана таблицей. Найдите ее область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функциональной, и обобщите свой ответ:

а)

x	-3	-2	2	4	7
y	3	2	3	2	0

в)

x	5	4	5	3	5
y	5	4	3	2	1

б)

x	1	-1	2	3	4
y	0	1	2	3	4

г)

x	1	2	3	4	5
y	4	4	4	4	4

740 Разложите многочлен на множители:

- а) $2a + b + 4a^2 - b^2$; в) $9mn^2 + 4m - 4m^3 - 6n$; д) $8x^3 + y^3 + 6x^2y + 3xy^2$;
- б) $25t^2 - 4z^2 - 2z - 5t$; г) $36d^4 - 49 - 12d^2r^2 - 14r^2$; е) $m^4 - 27mn^3 - m^2n + 9n^3$.

741 Найдите сумму многочленов P , Q и R :

- а) $P = 3p^2 - (p^2 + q^2)$, б) $P = (x - y)^3$,
 $Q = 5q^2 - (q^2 - 4p^2)$, $Q = -(x^3 + 5x^2y + 4xy^2 - 2y^3)$,
 $R = 8q^2 - (10q^2 + 5p^2)$; $R = -4x^2y + 4xy^2 + y^3 - (-9x^2y + 6xy^2 + 3y^3)$.

742 Решите уравнение:

а) $(x + 3)(x^2 + 8) - x^3 - 27 = 0$;

в) $z^2 - 48 + 8z = 0$;

б) $(y - 4)(y^2 - 5) - y^3 + 64 = 0$;

г) $r^2 + 19r + 78 = 0$.

743 Докажите, что:

а) если $p \in \mathbb{Z}$ и $p^2 - 1$ делится на 2, то $p^2 - 1$ делится на 8;

б) если $p \in \mathbb{Z}$ и $p^3 - 4p$ делится на 2, то $p^3 - 4p$ делится на 48.

744 а) Изюм содержит 10% воды. Из 80 кг винограда получается 5 кг изюма. Какой процент содержания воды в винограде?

б) Абрикосы при сушке теряют 80% своей массы. Из какого количества свежих абрикосов было получено 7 кг сушеных?

в) Клубника при сушке теряет 65% своей массы. Решили засушить 60 кг клубники. Сколько получится сушеной клубники?

Д

745 а) Проведите 30 испытаний по подбрасыванию игрального кубика и запишите в таблице результат каждого испытания. Используя калькулятор, вычислите с точностью до сотых частоту выпадения 5 очков в проведенной серии испытаний.

б) Проведите 60 испытаний по подбрасыванию игрального кубика и запишите в таблице результат каждого испытания. Вычислите частоту выпадения 5 очков в проведенной серии испытаний. Что вы замечаете?

746 а) При проведении социологического опроса был задан вопрос: «Кто из актрис российского кино вам больше всего нравится?» Ответ «Алиса Фрейндлих» выбрали 95 человек. После подсчета оказалось, что частота этого ответа среди всех ответов, полученных на данный вопрос, равна 0,19. Сколько человек принимало участие в этом опросе?

б) При проведении социологического опроса был задан вопрос: «Кто из актеров российского кино вам больше всего нравится?» Ответ «Дмитрий Харатьян» выбрали 171 человек. После подсчета оказалось, что частота этого ответа среди всех ответов, полученных на данный вопрос, равна 0,09. Сколько человек принимало участие в этом опросе?

747 В задании приведен отрывок из романа Жюль Верна «Двадцать тысяч лье под водой». Используя калькулятор, вычислите (с точностью до тысячных) частоту появления букв «А», «Е», «Н», «П». Сравните полученные результаты с таблицей частот букв русского алфавита, приведенной на стр. 22 части 3 учебника. Почему полученные вами частоты не совпадают с данными, приведенными в таблице?

«Соприкасаясь постоянно с кругами нашего ученого мирка при Ботаническом саде, Консель и сам кое-чему научился. Он специализировался в области естественнонаучной классификации, наловчился с быстротой акробата пробегать всю лестницу типов, групп, классов, подклассов, отрядов, семейств, родов, подродов, видов и подвидов.

Но его познания на этом и кончались. Классифицировать – это была его стихия, дальше он не шел. Сведущий в теории классификации, но слабо подготовленный практически, он, я думаю, не сумел бы отличить кашалота от беззубого кита!»



748 Чему равна вероятность:

- а) купить выигрышный билет лотереи, если известно, что каждый 240-й билет содержит выигрыш;
- б) вытащить на экзамене билет № 7, если всего билетов 36;
- в) угадать одно число из 52 чисел;
- г) выбрать, не глядя, из 15 разноцветных шаров шар определенного цвета?

749 а) Сколько различных комбинаций могут выпасть при одновременном подбрасывании двух обычных игральных кубиков? Запишите все возможные исходы.

- б) Проведите 60 испытаний и внесите в таблицу результаты испытаний, в которых выпадал один из кубиков с двумя очками. В первом столбце таблицы укажите все возможные исходы, во втором – общее количество проведенных испытаний, в третьем – количество испытаний, завершившихся указанным исходом, а в четвертом столбце вычислите с точностью до сотых частоту появления каждого исхода (используйте калькулятор).

750 Существует ли такое целое число, которое:

- а) при делении на 5 дает остаток 7, а при делении на 20 дает остаток 13;
- б) делится на 13, а при делении на 39 дает остаток 27?

751 а) Пловец проплыл 500 м, что составило 40% всей дистанции. Сколько метров ему еще надо проплыть?

- б) Во время распродажи телевизор стал стоить 23 855 р. Сколько стоил телевизор до распродажи, если размер скидки составил 35%?

в) В произведении трех чисел первый множитель уменьшили на 20%, второй увеличили на 65%, а третий уменьшили на 30%. Как изменилось произведение?

752 Зависимость y от x задана таблицей. Найдите ее область определения и область значений. Является ли данная зависимость функцией? Обоснуйте свой ответ.

а)

x	-5	-1	3	9	11
y	2	7	7	2	7

б)

x	6	3	6	3	4
y	2	5	9	13	17

753 Разложите многочлен на множители:

- а) $3a + b + 9a^2 - b^2$; в) $mn^2 + 24m - 64m^3 - 3n$; д) $27x^3 + y^3 + 12x^2y + 4xy^2$;
- б) $36t^2 - z^2 - 2z - 12t$; г) $25d^4 - 81 - 15d^2r^2 - 27r^2$; е) $m^4 - 64mn^3 - m^2n + 16n^3$.

754 Найдите сумму многочленов P , Q и R :

- а) $P = 5a^2 - (3a^2 - 2b^2)$, б) $P = 8p^3 - 4p^2q + 6pq^2 - 2q^3$,
 $Q = 7b^2 - (6b^2 + 4a^2)$, $Q = -(10p^3 + 7p^2q + 5pq^2 - 3q^3)$,
 $R = 3a^2 - (6b^2 - 3a^2)$; $R = -5p^2q + 9pq^2 + q^3 - (-13p^2q + 7pq^2 + 2q^3)$.

755 Решите уравнение:

- а) $(x + 5)(x^2 - 7) - x^3 - 125 = 0$; в) $z^2 + 63 - 16z = 0$;
- б) $(y - 2)(y^2 + 9) - y^3 + 8 = 0$; г) $r^2 + 7r - 44 = 0$.

756 а) Сено содержит 10% воды. Из 157,5 кг свежескошенной травы получается 35 кг сена. Какой процент содержания воды в свежескошенной траве?

- б) Чернослив при сушке теряет 70% своей массы. Из какого количества свежих слив было получено 12 кг сушеных?

757 Решите уравнение $|x + a| - |x - b| = |x - c|$:

$$a = \left(2,04 + \frac{10}{77} \cdot 70,84 : 2,3 - \left(2,025 - 1\frac{5}{6}\right) : 4\frac{19}{24}\right) \cdot 0,1;$$

$$b = \left(17\frac{1}{18} \cdot 3,6 - 0,476 : 14\right) : \left(0,09 \cdot 870 - 120 : 4\frac{2}{7}\right) + 0,834 : 0,3;$$

$$c = \left(8,6 \cdot \frac{1}{4} - \left(5\frac{61}{90} - 4\frac{1}{12}\right)\right) \cdot \left(\frac{7}{40} : 2\frac{11}{12} + 1,34\right) : \frac{1}{9}.$$



с

758* Если к половине возраста Сашиного папы прибавить 8, то получится его возраст 15 лет назад. Сколько лет Сашиному папе?

759*

В офисе одной компании работает 150 человек. Причем часть сотрудников этой компании всегда говорят правду, а все остальные всегда лгут. Каждому из сотрудников компании был задан вопрос: «Если не считать вас, то кого больше среди остальных сотрудников компании – лжецов или тех, кто говорит правду?» Когда 76 участников на этот вопрос ответили, что лжецов больше, опрос прекратили. Можно ли по результатам этого опроса определить, сколько в компании лжецов?

2. Классическая схема определения вероятности



Чем более трудной является задача определения того, что кажется неопределенным и подчинено случаю, тем более наука, которая достигает этого результата, представляется удивительной.

Христиан Гюйгенс (1629–1695), голландский математик и физик

Как мы уже обсуждали в предыдущем пункте, в некоторых случаях мы можем вычислить вероятность того или иного случайного события. В частности, если при проведении некоторого испытания мы имеем n равновозможных исходов, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{n}$.

Рассмотрим серию из n испытаний, в которых все исходы равновозможны. Пусть теперь число благоприятных исходов для события A равно некоторому натуральному числу $n(A) \neq 1$. Тогда вероятность его наступления будет в $n(A)$ раз больше, чем $\frac{1}{n}$, и, следовательно, равна $\frac{n(A)}{n}$. Поэтому при определении вероятности случайного события A в этом случае используют следующую, так называемую *классическую, схему*.

Классическая схема определения вероятности случайного события A

1. Определить число n всех возможных исходов рассматриваемого испытания.
2. Определить число $n(A)$ благоприятных исходов, при которых наступает событие A .
3. Вероятность события A равна отношению $n(A)$ к n : $P(A) = \frac{n(A)}{n}$

Заметим, что если для некоторого испытания все исходы равновозможны и какое-то событие не происходит ни при каком повторении испытания, то число благоприятных исходов для него равно нулю: $n(A) = 0$. Поэтому вероятность такого невозможного события равна

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Например, невозможным событием является выпадение числа 7 при бросании обычного игрального кубика.

Если же какое-то событие происходит при любом повторении испытания, то есть если событие является *достоверным*, то число благоприятных исходов для него $n(A) = n$. Тогда вероятность такого события равна

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Поскольку число благоприятных исходов больше или равно нулю и всегда меньше или равно числу всех возможных исходов, то вероятность любого случайного события всегда больше или равна 0 и меньше или равна 1.

$$0 \leq n(A) \leq n \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Используя классическую схему определения вероятности, решим следующие задачи.

Задача 1.

Бросают два обычных «идеальных» (абсолютно симметричных) игральных кубика. Вычислите вероятность выпадения шести очков на каждой из верхних граней этих двух кубиков.

Решение:

Пусть A – событие, при котором на верхних гранях обоих кубиков выпадает число 6.

Поскольку кубики «идеальные», то выпадение на верхних гранях каждого из них одного из шести чисел события равновозможные, и мы можем воспользоваться классической схемой определения вероятности.

1. Вначале определим общее число n возможных исходов при бросании двух кубиков. Для этого вычислим число всех комбинаций, которые при этом могут возникнуть.

Если на первом кубике выпадает число 1, то всего имеется шесть различных вариантов выпадения двух кубиков, так как на втором кубике могут выпасть числа от 1 до 6.

Аналогичный вывод можно сделать и при выпадении на первом кубике чисел 2, 3, 4, 5 и 6. В итоге мы получаем 36 возможных вариантов выпадения кубиков (рис. 18).

Следовательно, $n = 36$.

1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5	1 : 6
2 : 1	2 : 2	2 : 3	2 : 4	2 : 5	2 : 6
3 : 1	3 : 2	3 : 3	3 : 4	3 : 5	3 : 6
4 : 1	4 : 2	4 : 3	4 : 4	4 : 5	4 : 6
5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4	5 : 5	5 : 6
6 : 1	6 : 2	6 : 3	6 : 4	6 : 5	6 : 6



Рис. 18

2. Благоприятный исход, при котором на обоих кубиках выпадает шесть очков, возможен только в одном случае. Поэтому $n(A) = 1$.

3. Вероятность события A равна отношению $n(A)$ к n :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{1}{36}.$$

Ответ: при бросании двух кубиков вероятность выпадения шести очков на каждой из их верхних граней равна $\frac{1}{36}$.

В последующем для краткости под игральными кубиками мы будем понимать обычные «идеальные» игральные кубики.

Задача 2.

Бросают два игровых кубика. Вычислите вероятность выпадения на верхних гранях этих кубиков в сумме восьми очков.

Решение:

Пусть A – событие, при котором на верхних гранях обоих кубиков в сумме выпадает восемь очков. Поскольку вероятности выпадения на верхних гранях кубиков одного из шести чисел равны, то мы можем воспользоваться классической схемой определения вероятности.

1. Общее число n возможных исходов при бросании двух кубиков мы вычислили в задаче 1, оно равно 36:

$$n = 36.$$

2. Для того чтобы определить число благоприятных исходов, составим таблицу возможных исходов при бросании двух кубиков и выделим в ней те случаи, в которых сумма очков на двух кубиках равна восьми (рис. 19).

1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5	1 : 6
2 : 1	2 : 2	2 : 3	2 : 4	2 : 5	2 : 6
3 : 1	3 : 2	3 : 3	3 : 4	3 : 5	3 : 6
4 : 1	4 : 2	4 : 3	4 : 4	4 : 5	4 : 6
5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4	5 : 5	5 : 6
6 : 1	6 : 2	6 : 3	6 : 4	6 : 5	6 : 6

Рис. 19

1 : 1	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5	1 : 6
2 : 1	2 : 2	2 : 3	2 : 4	2 : 5	2 : 6
3 : 1	3 : 2	3 : 3	3 : 4	3 : 5	3 : 6
4 : 1	4 : 2	4 : 3	4 : 4	4 : 5	4 : 6
5 : 1	5 : 2	5 : 3	5 : 4	5 : 5	5 : 6
6 : 1	6 : 2	6 : 3	6 : 4	6 : 5	6 : 6

Рис. 20

Мы видим, что сумма очков на двух кубиках равна восьми в пяти случаях. Следовательно, число благоприятных исходов для события A равно 5:

$$n(A) = 5$$

3. Вероятность события A равна отношению $n(A)$ к n :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{5}{36}.$$

Ответ: при бросании двух кубиков вероятность выпадения на верхних гранях в сумме восьми очков равна $\frac{5}{36}$.

Задача 3.

Бросают два игровых кубика. Вычислите вероятность выпадения на верхних гранях этих кубиков в сумме десяти очков.

Решение:

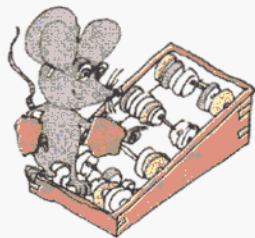
Пусть A – событие, при котором на верхних гранях обоих кубиков в сумме выпадает десять очков.

Решая задачу аналогично задаче 2, получаем, что $n = 36$, а $n(A) = 3$ (рис. 20). Поэтому вероятность события A будет равна:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: при бросании двух кубиков вероятность выпадения на верхних гранях в сумме десяти очков равна $\frac{1}{12}$.

Сравнивая решения задач 2 и 3, заметим, что вероятности выпадения на верхних гранях кубиков различных сумм не совпадают. А значит, данные события не являются равновероятными.



К

760

а) Задумали однозначное натуральное число. Найдите вероятность того, что случайно названное однозначное натуральное число окажется равным задуманному.

б) Задумали двузначное натуральное число. Найдите вероятность того, что случайно названное двузначное натуральное число окажется равным задуманному.

в) Задумали трехзначное натуральное число. Найдите вероятность того, что случайно названное трехзначное натуральное число окажется равным задуманному.

761

а) Бросают два игральных кубика. Вычислите вероятность выпадения на верхних гранях этих кубиков в сумме пяти очков.

б) Бросают два игральных кубика. Вычислите вероятность выпадения на верхних гранях этих кубиков в сумме семи очков.

в) Предложите свой способ вычисления вероятности случайного события в случаях, когда все исходы равновероятны. Сравните его с классической схемой вычисления вероятности, рассмотренной на стр. 176 учебника.

г) Как изменяется сумма очков на верхних гранях двух кубиков при их одновременном бросании? Являются ли равновероятными исходами выпадение на верхних гранях двух кубиков в сумме 3 очков и 6 очков? 2 очков и 12 очков?

762

Бросают два игральных кубика. Вычислите вероятность того, что:

а) сумма очков на верхних гранях нечетная и на одном из кубиков выпало 4 очка;

б) сумма очков, выпавших на верхних гранях, не больше 6;

в) сумма очков, выпавших на верхних гранях, не меньше 5 и не больше 8;

г) сумма выпавших на верхних гранях очков равна пяти, а модуль разности очков равен трем;

д) сумма выпавших на верхних гранях очков равна семи, а их произведение равно десяти.

763

а) Сахар и сахарная пудра были расфасованы в одинаковые мешки. В машину загрузили 40 мешков с сахаром и 10 мешков с сахарной пудрой. При перевозке мешки перемешались, а один мешок был утерян. Вычислите вероятность того, что был утерян:

1) мешок с сахаром;

2) мешок с сахарной пудрой.

б) Каждую из 33 букв русского алфавита записывают на отдельной карточке и карточки тщательно перемешивают. Вычислите вероятность того, что при вытаскивании одной карточки на ней будет написана: 1) гласная буква; 2) одна из букв слова «МАТЕМАТИКА».

в) На экзамене по истории 45 билетов. Соня не успела выучить 5 билетов. Вычислите вероятность того, что, взяв экзаменационный билет наугад, Соня вытащит билет, который она не успела выучить.

г) В лотерее 1000 билетов без выигрыша и 20 билетов с выигрышем. Чему равна вероятность выиграть в эту лотерею, купив один билет?

д) Пирог разделили на 15 кусков, в двух из которых находятся сюрпризы. Чему равна вероятность получить пирог с сюрпризом, взяв кусок пирога наугад?

764

На шарах написаны целые числа от 1 до 100. Шары положили в мешок и перемешали, а затем, не глядя в мешок, из него вытащили один шар. Вычислите вероятность того, что число на вытащенном шаре:

а) делится на 10;

в) делится на 3 и на 7;

б) делится на 5;

г) простое.

765

а) В ряд выложили красный, синий и зеленый шары. Чему равна вероятность того, что красный и синий шары окажутся рядом?

б) Наугад выбрано число от 1 до 400. Чему равна вероятность того, что оно окажется точным квадратом?

в) Из цифр 5, 7, 9 случайным образом составили трехзначное число, используя все цифры. Чему равна вероятность того, что полученное число: 1) делится на 5; 2) начинается на 7?

766

а) Чему равна вероятность того, что случайным образом выбранное двузначное число: 1) состоит из одинаковых цифр; 2) больше 35 и меньше 52?

б) Чему равна вероятность того, что первая же карта, вытащенная из обычной карточной колоды, содержащей 36 карт, окажется: 1) дамой; 2) пиковой масти; 3) дамой, королем или тузом?

в) В мешок положили четыре буквы: «О», «Р», «М», «Е». Из мешка их вытаскивают по одной букве и записывают вытащенные буквы подряд. Чему равна вероятность того, что в итоге записи получится слово «МОРЕ»?

767

а) Монету бросают три раза подряд. Вычислите вероятность того, что «решка» выпадет хотя бы два раза.

б) В коробке лежит 6 разноцветных шаров: красный, синий, желтый, зеленый, белый и черный. Из нее наугад выбирают 3 шара. Вычислите вероятность того, что среди извлеченных шаров окажется синий шар.

в) В конверте 12 фотокарточек, и среди них одна разыскиваемая. Из него наугад вытаскивают 7 фотокарточек. Вычислите вероятность того, что среди вытащенных фотокарточек окажется нужная.

г) В экзаменационные билеты по математике включены 40 вопросов. Каждый из экзаменационных билетов содержит 2 вопроса. Гоша, готовясь к экзамену, не успел выучить 5 вопросов. Билет он взял наугад. Вычислите вероятность того, что Гоше попадется билет, в котором оба вопроса он не успел выучить.

π

768 Прочитайте высказывание и определите, истинно оно или ложно. Если высказывание ложно, постройте его отрицание и доказите истинность отрицания:

- а) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}; a > b: c - a > c - b$; в) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}; a \leq c: 3b - 2a \geq 3b - 2c$;
 б) $\exists a, b, c \in \mathbb{N}: 2a + 3b = 6c$; г) $\exists a \in \mathbb{Z}: 4(a + 3) = 7 - 3(a - 2)$.

769 С помощью алгоритма Евклида найдите НОД чисел a и b :

- а) $a = 851, b = 2627$; б) $a = 767, b = 2537$; в) $a = 2201, b = 3763$.

770 Три книжных магазина приобрели одинаковое количество экземпляров новой книги популярного автора. Первый магазин купил книги в упаковках по 20 штук, второй – в упаковках по 15 штук, а третий – в упаковках по 35 штук. Сколько экземпляров данной книги приобрел каждый из магазинов, если общее количество экземпляров было меньше 1300 штук?



771 Докажите, что:

- а) $a^2 + 7$ не делится на 3 для любого целого числа a ;
 б) если целое число a не делится на 5, то $a^4 + 4$ делится на 5.

772 а) Пробка растянулась на 2500 м. Автомобилист, двигавшийся по встречной полосе со скоростью 60 км/ч, отметил, что путь от начала и до конца пробки он проехал за 2 минуты. С какой средней скоростью двигались машины в пробке?

б) Два поезда выехали одновременно навстречу друг другу из двух городов, находящихся на расстоянии 420 км друг от друга. Скорость одного из поездов равна 50 км/ч. Чему равна скорость другого поезда, если встреча состоится через 3,5 часа?

в) Из пунктов A и B , находящихся на расстоянии 135 км друг от друга, выехали одновременно в противоположных направлениях два автомобилиста. Скорость первого автомобилиста равна 75 км/ч. С какой скоростью ехал второй автомобилист, если через 9 часов расстояние между ними стало равно 1530 км?

г) Машина ДПС догоняла машину нарушителя, двигаясь со скоростью 110 км/ч. В начале погони расстояние между машинами равнялось 2 км, а через 15 мин погони расстояние между ними стало 750 м. С какой скоростью двигалась машина нарушителя?

773 Упростите выражение:

- а) $48 + 2(5(7 - a) - 3a) + 6a - 3(8a - (4a - 40)) - 3a - 8 + 21a$;
 б) $-(3(7x - 4y) - 5z - 9) - 4(0,5(4 - 2(3y - 7x) - 4(3x - 7y)) - 1) - 19x - 3(5x - 7y)$;
 в) $(5mn^2) : (\frac{1}{2}mnl) \cdot (-2m^3nl) : (4mn^3l) : (l^2mn) \cdot (ln^2)$.

774 На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

- а) $5x + 4 < 19; 3y + 7 \leq -8$; в) $-14 \leq 6x - 8 \leq 10; -7 < 8y + 9 \leq 25$;
 б) $4x - 7 > 5; 2y - 9 \leq 1$; г) $-23 \leq 9x + 4 < -5; -14 \leq 11y - 3 < 30$.

775 Две подруги, Таня и Марина, отправились одновременно из города A в город B , одна на велосипеде, а другая на мотоцикле. Через некоторое время оказалось, что если бы Марина проехала в четыре раза больше, то ей осталось бы проехать в три раза меньше, чем сейчас, и что если бы Таня проехала в три раза меньше, то ей осталось бы проехать в четыре раза больше, чем сейчас. На чем ехала Таня, если девочка, которая ехала на мотоцикле, передвигалась с большей скоростью, чем велосипедистка?

776 Определите, какой цифрой оканчивается число:

- а) $4679^{9764^{764}}$; б) $59\ 347^{347^{59}}$; в) 999^{549} ; г) $777\ 777^{587\ 313}$.

777 Решите уравнение:

- а) $x^3 - 9x^2 + x - 9 = 0$; в) $5z^3 + 55z^2 + 10z + 110 = 0$;
 б) $y^4 - 6y^3 + 8y^2 - 48y = 0$; г) $2t^4 + 18t^3 + 7t^2 + 63t = 0$.

Д

778 Бросают два игральных кубика. Вычислите вероятность того, что:

- а) на верхних гранях этих кубиков выпало в сумме четырех очка;
 б) сумма очков на выпавших гранях четная и на одном из кубиков выпало 5 очков;
 в) сумма очков, выпавших на верхних гранях, не больше 7;
 г) сумма очков, выпавших на верхних гранях, не меньше 4 и не больше 6;
 д) сумма выпавших на верхних гранях очков равна семи, а модуль их разности равен пяти.
 е) сумма выпавших на верхних гранях очков равна шести, а их произведение равно восьми.

779 а) Каждую из 33 букв русского алфавита записывают на отдельной карточке и карточки тщательно перемешивают. Вычислите вероятность того, что при вытаскивании одной карточки на ней будет написана:

- 1) согласная буква;
 2) одна из букв слова «СТАТИСТИКА».

б) На экзамене по литературе 45 билетов. Вася не успел выучить 6 билетов. Вычислите вероятность того, что, взяв экзаменационный билет наугад, Вася возьмет билет, который он успел выучить.



780 На шарах написаны целые числа от 1 до 100. Шары положили в мешок и перемешали, а затем, не глядя в мешок, один шар вытащили из него. Вычислите вероятность того, что число на вытащенном шаре:

- а) делится на 7; б) делится на 5 и на 4.

781 а) В ряд выложили три пирожных: эклер, корзиночку и бизе. Чему равна вероятность того, что эклер и бизе окажутся рядом?

б) Из цифр 3, 4, 8 случайным образом составили трехзначное число, используя все цифры. Чему равна вероятность того, что полученное число:

- 1) делится на 2; 2) начинается на 8?

782 а) Чему равна вероятность того, что случайным образом выбранное трехзначное число: 1) состоит из трех одинаковых цифр; 2) больше 121 и меньше 148?

б) В мешок положили пять букв: «Е», «Ч», «А», «М» и «Т». Из мешка их вытаскивают по одной букве и записывают вытасканные буквы подряд. Чему равна вероятность того, что в итоге записи получится слово «МЕЧТА»?

783 а) Монету бросают два раза подряд. Вычислите вероятность того, что хотя бы один раз выпадет «орел».

б) В коробке лежит 5 разноцветных карандашей: сиреневый, синий, зеленый, красный и оранжевый. Из коробки наугад выбирают 2 карандаша. Вычислите вероятность того, что среди извлеченных карандашей окажется зеленый.

в) В конверте 14 открыток, и среди них одна нужная. Из конверта наугад вытаскивают 6 открыток. Вычислите вероятность того, что среди вытасканных открыток окажется нужная.

г) В экзаменационные билеты по физике включены 60 вопросов. Каждый из экзаменационных билетов содержит 3 вопроса. Антон, готовясь к экзамену, не успел выучить 7 вопросов. Вычислите вероятность того, что, взяв экзаменационный билет наугад, Антон вытащит билет, в котором все три вопроса он не успел выучить.

784 С помощью алгоритма Евклида найдите НОД чисел a и b :

а) $a = 533$, $b = 1517$;

б) $a = 1411$, $b = 1909$.

785 Четыре киоска заказали одинаковое количество экземпляров одного и того же журнала. Первый киоск заказал журналы в упаковках по 14 штук, второй – в упаковках по 21 штуке, третий – в упаковках по 42 штуки, а четвертый – в упаковках по 28 штук. Сколько экземпляров данного журнала приобрел каждый из киосков, если общее количество экземпляров было меньше 400 штук?

786 Докажите, что $a^3 + 3a$ для любого целого числа a либо делится на 4, либо при делении на 4 дает остаток 2.

787 а) Колонна демонстрантов растянулась на 800 м. Велосипедист, двигавшийся навстречу колонне со скоростью 10 км/ч, проехал от начала и до конца колонны за 4 минуты. С какой средней скоростью двигалась колонна демонстрантов?

б) Две электрички выехали одновременно навстречу друг другу с двух станций, находящихся на расстоянии 22,5 км друг от друга. Средняя скорость одной электрички равна 40 км/ч. Чему равна средняя скорость второй электрички, если они встретятся через 15 мин?

в) Из пунктов A и B , находящихся на расстоянии 12 км друг от друга, вышли одновременно в противоположных направлениях два пешехода. Скорость первого пешехода равна 3 км/ч. С какой скоростью шел второй пешеход, если через 2 часа расстояние между ними стало равно 28 км?

788 Упростите выражение:

а) $5a + (2(3 - 3a) - 4a) - 7a - 5(3a - (6a + 3)) - 7a - 12 + 9a$;

б) $4(2x - 3y) - 6z - 8 - 2(-7 - 9(y - x) - (6x - 9y)) - 4 - 6x - 4(2x - 5y)$;

в) $(7pq^3) : (\frac{1}{3}pqr) \cdot (-3p^2qr) : (-63pq^4r) : (pqr^3) \cdot (qr^2)$.

Задачи для самоконтроля к Главе 7

789 На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $3x + 7 > 28$; $5y - 3 \leq -18$;

б) $-11 \leq 2x - 9 \leq 7$; $-14 < 6y + 4 \leq 28$.

790 Решите уравнение:

а) $x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = 0$;

б) $2y^4 - 8y^3 + 3y^2 - 12y = 0$.

791 Определите, какой цифрой оканчивается число:

а) $7523^{3257^{752}}$;

б) $95\ 217^{712^{95}}$.

792 Решите неравенство $|x - a| + |x - b| < |x + c|$:

$$a = \left(\frac{5}{7} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} - 1\right) \cdot 9 : \left(1 - \frac{7}{8} \cdot 1\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{14}\right);$$

$$b = \left(8\frac{7}{15} - 3\frac{3}{4} + 4\frac{2}{5} - 8\frac{7}{60}\right) : \left(1\frac{5}{12} - \frac{11}{12}\right);$$

$$c = \left(1\frac{8}{13} \cdot \frac{13}{42} + 5\frac{5}{7} : \frac{8}{21}\right) : \left(2\frac{17}{24} + 1\frac{1}{6}\right).$$



с **793*** Имеется 17 чисел, равных 2,3, и 19 чисел, равных 2,33. Можно ли их разбить на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась сумме чисел в другой группе?

794* Два пловца стартовали одновременно от одного бортика бассейна и стали плавать по одной дорожке вперед и назад без остановки до того момента, пока оба одновременно не оказались у того бортика, от которого стартовали. Первый проплыл от одного конца бассейна до другого за 3 минуты, а второй – за 5 минут. Сколько раз за время этого плавания первый пловец обогнал второго?

Задачи для самоконтроля к Главе 7

795 а) Флаг составлен из четырех одинаковых вертикальных полос разных цветов. Сколько различных флагов удовлетворяют этому условию?

б) Сколько различных пятизначных чисел, цифры в которых не повторяются, можно составить из цифр 7, 9, 3, 2, 1?

796 а) В интернет-магазине продается 17 моделей компьютеров и 8 моделей принтеров. Сколькими способами можно купить в этом магазине компьютер и принтер?

б) У Кати имеются шесть различных значков. Сколькими способами она может положить все эти значки в ряд?

в) Сколько различных шестизначных паролей из букв A, B, C, D, E, F можно составить, если буквы в пароле не должны повторяться?

797 а) В меню кафе 7 видов кофе, 5 видов пирожных и 6 видов мороженого. Сколькими способами можно заказать в этом кафе кофе с пирожным и мороженым?

б) Сколькими способами можно выбрать из 9 детективов, 11 классических произведений и 7 книг о приключениях три книги: детектив, классическое произведение и книгу о приключениях?

798 а) Сколькими способами можно разместить в одном ряду три бутылки минеральной воды и четыре газированных напитка так, чтобы все бутылки с минеральной водой стояли рядом?

б) Сколько шестизначных чисел, кратных 4, можно составить из цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, если цифры в искомом числе не повторяются?

799 а) Сколько существует четырехзначных чисел, в записи которых встречаются только цифры 2, 3, 5, 7, 8, 9?

б) Алфавит туземного племени состоит из букв «А», «В», «О», «У». Словом в этом языке является любая последовательность из шести букв. Какое максимальное количество слов может быть в языке этого туземного племени?



800 а) Номера квартир в доме состоят не более чем из трех цифр и не содержат цифры 0, 7 и 8. Может ли в этом доме быть 400 квартир?

б) Известно, что код сейфа является последовательностью цифр длиной не более четырех символов. Сколько существует вариантов такого кода?

801 В таблице приведено расписание вылета авиарейсов из аэропорта Домодедово (Москва). Прилет всех указанных рейсов происходит в день их вылета.

Расписание вылета авиарейсов из аэропорта Домодедово (Москва)

Пункт назначения	Время вылета (московское)	Время прилета (московское)
Владивосток	05:00	13:45
Абакан	07:15	11:45
Ижевск	09:55	12:00
Бухара	10:25	14:15
Геленджик	12:05	14:00
Караганда	16:10	19:40
Красноярск	18:20	22:50
Магнитогорск	20:30	22:40

Пользуясь представленной информацией, определите:

- 1) В котором часу отправляется рейс в Геленджик?
- 2) Чему равна длительность полета в Караганду?
- 3) Какой рейс имеет наименьшую длительность полета и чему равна длительность этого полета?
- 4) В каком рейсе длительность полета наибольшая и чему она равна?
- 5) Какой рейс длится 2 часа 5 мин?
- 6) В какие города надо лететь больше 4 часов, но меньше 8 часов?
- 7) Полет в какие города занимает более 6 часов?

Постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую зависимость длительности полета от выбранного пункта назначения.

- 802** В Интернете был проведен социологический опрос, посвященный коллекционированию. Постройте круговые диаграммы, иллюстрирующие результаты, полученные после анализа ответов участников опроса.

а) Вопрос: Что вы коллекционируете?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Монеты	20%
Марки	15%
Картины	10%
Другое	25%
Ничего	30%



б) Вопрос: Почему люди становятся коллекционерами?

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Чтобы отвлечься, отдохнуть	45%
Чтобы расширить свой кругозор, узнать новое	40%
Чтобы, вложив деньги сейчас, получить доход в будущем	10%
Другое	5%

- 803** В таблице приведены данные о производстве в Российской Федерации автоматических стиральных машин (в тыс. штук) в 2001–2008 гг.

Год	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Автоматические стиральные машины	3,6	169,3	197,4	287,9	434,1	1022,1	1794,3	2067,7

В результате анализа представленной информации были вычислены следующие статистические характеристики:

- а) 3,6; б) 747,05; в) 2067,7; г) 2064,1; д) 361.

Определите, какую статистическую характеристику могли вычислять в каждом из пунктов.

- 804** а) В течение учебного года Миша несколько раз участвовал в соревнованиях по бегу на 500 м. По итогам всех соревнований он показал следующие результаты:

Результат	1,5 мин	1,45 мин	1,4 мин	1,35 мин	1,3 мин	1,25 мин
Количество раз	3	2	5	8	3	1

Найдите средний результат Миши по бегу на 500 м (с точностью до сотых минуты), моду, размах и медиану представленного числового набора.

б) Семь друзей, Саша, Коля, Сережа, Петя, Костя, Дима и Иван, собирали в течение года постеры. Саша собрал 7 постеров, Коля – 9, Сережа – 12, Петя – 7, Костя – 7, Дима – 14, а Иван – 16. Найдите среднее арифметическое количества собранных мальчиками постеров (с точностью до единиц), моду, размах и медиану представленного числового набора.

805 При проведении социологического опроса был задан вопрос: «Кто является вашим любимым русским писателем?» Ответ «Николай Васильевич Гоголь» выбрали 280 человек. После подсчета оказалось, что частота данного ответа среди всех ответов, полученных на данный вопрос, равна 0,14. Сколько человек принимало участие в этом опросе? Сколько человек называли других писателей?

806 Являются ли равновероятными события A и B ?

- а) A : при бросании двух идеальных монет выпала комбинация «орел» и «решка»;
 B : при бросании двух идеальных монет выпала комбинация «орел» и «орел».
- б) A : при бросании идеального игрального кубика выпало 2 очка;
 B : при бросании идеального игрального кубика выпало 5 очков.
- в) A : при бросании идеального игрального кубика выпало число, кратное 4;
 B : при бросании идеального игрального кубика выпало число, не кратное на 4.
- г) A : Вася угадал одну из 56 цифр, загаданных его другом;
 B : Вася не угадал одну из 56 цифр, загаданных его другом.
- д) A : из 48 экзаменационных билетов Ира вытащила счастливый для нее билет № 7;
 B : из 48 экзаменационных билетов Ира вытащила несчастливый для нее билет № 23;
- е) A : Саша выиграл 20 р. в моментальную лотерею;
 B : Саша не выиграл 20 р. в моментальную лотерею.



807 Чему равна вероятность:

- а) купить выигрышный билет лотереи, если известно, что каждый 50-й билет содержит выигрыш;
- б) вытащить на экзамене билет № 13, если всего билетов 39;
- в) взять наугад нужную книгу с полки, на которой стоит 340 книг;
- г) угадать одно число из 78;
- д) выбрать, не глядя, из 20 разноцветных шаров шар определенного цвета?

808 Бросают два игральных кубика. Вычислите вероятность того, что:

- а) сумма очков, выпавших на верхних гранях кубиков, равна 11;
- б) сумма очков на выпавших гранях нечетная, и на одном из кубиков выпало 2 очка;
- в) сумма очков, выпавших на верхних гранях, не больше 7;
- г) сумма очков, выпавших на верхних гранях, не меньше 3 и не больше 5.

809 а) Каждую из 33 букв русского алфавита записывают на отдельной карточке и карточки тщательно перемешивают. Вычислите вероятность того, что при вытаскивании одной карточки на ней будет написана: 1) одна из букв слова «ВЕРОЯТНОСТЬ»; 2) одна из букв слова «КОМБИНАТОРИКА».

б) На экзамене по информатике 53 билета. Андрей не успел выучить 2 билета. Вычислите вероятность того, что, взяв экзаменационный билет наугад, Андрей получит билет, который он успел выучить.

810 На шарах написаны целые числа от 1 до 100. Шары положили в мешок и перемешали, а затем, не глядя в мешок, из него вытащили один шар. Вычислите вероятность того, что число на вытащенном шаре:

- а) делится на 9;
- б) делится на 12;
- в) делится на 9 и на 2;
- г) делится на 11 и на 3.

811 Сравните числа:

- а) $\frac{39}{41}$ и $\frac{273}{289}$; б) $\frac{314}{315}$ и $\frac{315}{316}$; в) $\frac{199}{400}$ и $\frac{198}{395}$; г) $\frac{37}{83}$ и $\frac{377}{837}$.

812 а) Моторная лодка при движении по реке прошла расстояние от города А до города В за 4 часа, а на обратный путь ей потребовалось 6 часов. Найдите собственную скорость движения моторной лодки, если скорость течения реки равнялась 3 км/ч. Найдите среднюю скорость движения лодки.

б) Расстояние от Твери до Нижнего Новгорода по водному пути составляет 810 км. За какое время проплывет теплоход путь от Твери до Нижнего Новгорода и обратно, если собственная скорость теплохода будет равна 28,5 км/ч, скорость течения реки равна 1,5 км/ч, а время на остановки составит 20% от всего времени движения?

в) Склад арендуют 4 компании. Расходы каждой из компаний на отопление склада относятся как 3 : 4,2 : 5 : $\frac{2}{5}$. Рассчитайте сумму, которую должны заплатить за отопление за апрель эти четыре компании, если известно, что компания, которая платит за электроэнергию больше всех, заплатила за апрель 17 500 р.

г) Прямоугольный участок земли изображен на плане, выполненном в масштабе 1 : 6000. Чему равна реальная площадь этого участка, если большая сторона прямоугольника равна на плане 5,6 см, а меньшая составляет $\frac{4}{7}$ от большей?

д) Инвестор вложил свои сбережения на три года в инвестиционные фонды А и В. В инвестиционный фонд А он поместил 100 000 р. под 12% годовых, а в инвестиционный фонд В – 120 000 под 8% годовых. В каком из фондов инвестор заработает больше денег и на сколько?

е) Какую сумму денежных средств нужно положить в банк, чтобы получить через 2 года доход в размере 14 144 р., если банк предлагает разместить вклады под 8% годовых?

ж) Во время распродажи пылесос стал стоить 4252,5 р. Сколько стоил пылесос до распродажи, если размер скидки составил 30%?

з) В произведении трех чисел первый множитель увеличили на 40%, второй уменьшили на 65%, а третий увеличили на 20%. Как изменилось произведение?

813 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

- а) $\frac{36a^2 - 81b^2}{6a + 9b}$; г) $\frac{216a^3 - 108a^2 + 18a - 1}{36a^2 - 12a + 1}$;
 б) $\frac{25x^2 - 110xy + 121y^2}{5x - 11y}$; д) $\frac{64a^3 - 27b^3}{16a^2 + 12ab + 9b^2}$;
 в) $\frac{2x + 5y}{8x^3 + 60x^2y + 150xy^2 + 125y^3}$; е) $\frac{25a^2 + 40ab + 16b^2}{125a^3 + 64b^3}$.



814 а) Расположите числа 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 в клетках квадрата размером 3×3 так, чтобы квадрат стал магическим. Сколько таких квадратов можно составить?

б) Расположите числа 5, 17, 29, 47, 59, 71, 89, 101, 113 в клетках квадрата размером 3×3 так, чтобы квадрат стал магическим. Сколько таких квадратов можно составить?

815 а) Учащиеся восьмого класса изучают 9 различных предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы в этот день было 6 различных уроков?

б) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если цифры не могут повторяться?

816 а) Сколько нечетных номеров, состоящих не более чем из пяти цифр, можно составить из цифр 3, 4, 7, 8, 9?

б) Для нумерации ячеек в камере хранения используется четыре цифры: 5, 6, 7, 8. Можно ли с их помощью занумеровать 160 ячеек, поставив в соответствие каждой ячейке свое четное число, состоящее не более чем из четырех указанных цифр?

в) Автомобильный номер некоторого государства устроен следующим образом: номер начинается с одной, двух или трех букв, а затем идут четыре цифры. Сколько существует автомобильных номеров, которые оканчиваются на 9, если в алфавите этого государства 32 буквы и в номере могут использоваться все десять арабских цифр?

817 1) Зарплатная ведомость компании, занимающейся продажей канцтоваров, выглядит следующим образом:

№ п/п	ФИО	Сумма к получению	№ п/п	ФИО	Сумма к получению
1	Антонова Б.В.	25 200 р.	6	Митрохина А.А.	27 500 р.
2	Белоконь С.Г.	32 400 р.	7	Проскураков Б.П.	32 400 р.
3	Владимирова П.С.	15 600 р.	8	Солдатов К.В.	105 200 р.
4	Ершов Д.К.	27 500 р.	9	Суханов Р.Т.	36 900 р.
5	Калинин В.В.	75 300 р.	10	Ушакова М.Н.	57 300 р.

а) Вычислите среднюю зарплату, моду, размах и медиану представленного числового набора.

б) Какой стала бы средняя зарплата, мода, размах и медиана, если бы все зарплаты увеличились в 4 раза, уменьшились в 1,2 раза?

2) В интернет-магазине продаются телевизоры по следующим ценам:

Модель №	1	2	3	4	5	6	7	8
Цена	15 840	19 400	20 900	30 150	21 100	22 500	33 550	19 400

а) Вычислите среднюю цену телевизора в этом интернет-магазине, моду, размах и медиану представленного числового набора.

б) Какой стала бы средняя цена, мода, размах и медиана, если бы все цены увеличились в 2,4 раза, уменьшились в 1,3 раза?

818 а) Монету бросают четыре раза подряд. Вычислите вероятность того, что «орел» выпадет хотя бы три раза.

б) В экзаменационные билеты по биологии включены 50 вопросов. Каждый из экзаменационных билетов содержит 3 вопроса. Олег, готовясь к экзамену, не успел выучить 7 вопросов. Вычислите вероятность того, что, взяв экзаменационный билет наугад, Олег получит билет, в котором все 3 вопроса он не успел выучить.

Задачи для самоконтроля по курсу 7 класса

819 Вычислите (устно):

- а) $-\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$; в) $-2\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{16}$; д) $0,7 : (-0,02)$; ж) $0,25 : \frac{1}{2}$; и) $3,6 \cdot (-\frac{1}{4})$;
 б) $\frac{9}{20} - 1\frac{1}{5}$; г) $-\frac{5}{9} : (-3\frac{1}{3})$; е) $-1,5 \cdot (-0,06)$; з) $(\frac{3}{4} + 0,75) \cdot 2$; к) $(5,8 - \frac{4}{5}) : 2$.

820 Найдите значение выражения:

- а) $41\,513 - 95\,729 + 63\,729 + 58\,487$; г) $423 \cdot 190 + 190 \cdot 77$;
 б) $38 + 23 + 64 + 37 + 51 + 55 + 42 + 36 + 29 + 25$; д) $925 : 7 - 295 : 7$;
 в) $(397 + 1168 - (197 - 432)) : (726 - 814 - (526 - 914))$; е) $3\frac{8}{9} \cdot 2\frac{1}{4} : 2\frac{1}{8} \cdot 2\frac{3}{7}$;
 ж) $2 : \frac{6}{7} + \frac{3}{8} : 9 + 1\frac{1}{2} : 6 + 6 : 1\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} : 2\frac{2}{3}$;
 з) $2\frac{3}{5} : 6\frac{1}{15} + 1\frac{1}{14} - 1\frac{39}{73} \cdot (5\frac{5}{7} - 5\frac{1}{16})$;
 и) $\frac{(1,238 + 2,762) \cdot 0,1}{(36,987 - 34,487) : 3,125} + \frac{(4,37 - 3,12) \cdot 0,8}{0,2 \cdot (47,8 - 45,55) : 0,225}$;
 к) $((4,625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26}) : 2\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} : 1,25 : 6\frac{3}{4}) : 1\frac{53}{68} - \frac{7}{27}$;
 л) $(\frac{1}{2} - 0,375) : \frac{1}{8} - (3\frac{5}{6} - 3\frac{7}{12}) : (0,358 - 0,108)$;
 м) $\frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \frac{1}{17 \cdot 21} + \frac{1}{21 \cdot 25} + \frac{1}{25 \cdot 29}$;
 н) $\frac{1}{11 \cdot 18} + \frac{1}{18 \cdot 25} + \frac{1}{25 \cdot 32} + \frac{1}{32 \cdot 39}$.



821 Постройте математическую модель и решите задачу:

- а) Длина ломаной $ABCD$ равна 54 см. Известно, что длина AB в 5 раз меньше расстояния между началом и концом ломаной, длина BC – в 3 раза больше AB , а длина CD – на 1 см меньше, чем AB . Чему равна длина CD ?
- б) Величина первого угла треугольника на 30 градусов меньше второго, а длина третьего – в 4 раза больше, чем второго. Найдите величину большего угла этого треугольника.
- в) Выручка компании за год составила 974,8 тыс. р. В первом квартале выручка была на 56,1 тыс. р. больше, чем во втором, в третьем – в 1,5 раза больше, чем во втором, а в четвертом была равна среднему арифметическому выручки первых трех кварталов. Сколько денег компания получила от покупателей в четвертом квартале?
- г) На складе лежит 245 ящиков с абрикосами. Их средний вес нетто равен 10,3 кг. После того как на склад поступило еще 20 ящиков с абрикосами, средний вес нетто ящика с абрикосами стал равен 10,5 кг. Сколько кг абрикосов поступило на склад?

- 822** Проверьте правильность следующих выводов, используя диаграммы Эйлера–Венна:
- Все решения неравенства $x > 7$ положительные числа. Единица – положительное число. Значит, единица – решение неравенства $x > 7$.
 - Все решения неравенства $x > 7$ положительные числа. Число (-6) не является положительным числом. Значит, число (-6) не является решением неравенства $x > 7$.
 - Все решения неравенства $x > 7$ положительные числа. Число (-6) не является решением неравенства $x > 7$. Значит, число (-6) не является положительным числом.
 - Все решения неравенства $x > 7$ положительные числа. Число 8 является решением неравенства $x > 7$. Значит, число 8 – положительное.
- 823** Определите истинность следующих утверждений:
- Если целое число a делится на 7, то число $3a$ делится на 7.
 - Если целое число b делится на 5, то число $4b$ делится на 20.
 - Если целое число $3c$ делится на 8, то число c делится на 8.
 - Если целое число a не делится на 11, то число $4a$ не делится на 11.
 - Не существует наибольшего целого числа, которое при делении на 7 дает остаток 2.
 - Если целое число при делении на 21 дает остаток 8, то при делении на 7 оно даст остаток 1.
- 824** Определите, делится ли:
- $40^2 \cdot 81^3$ на 12, 15, 17, 18, 35, 36, 54;
 - $25^2 \cdot 36^4$ на 10, 11, 45, 48, 65, 90, 100.
- 825** Найдите первое простое число, следующее за числом:
- 40;
 - 90;
 - 115;
 - 132;
 - 144.
- 826** Запишите в каноническом виде разложение чисел на простые множители:
- 675;
 - 810;
 - 1008;
 - 2160;
 - 3510.
- 827** Представьте дроби в несократимом виде:
- $\frac{161}{253}$;
 - $\frac{259}{407}$;
 - $\frac{697}{943}$;
 - $\frac{1247}{1333}$;
 - $\frac{1739}{1927}$.
- 828** Запишите три целых отрицательных числа, дающих:
- остаток 4 при делении на 6;
 - остаток 13 при делении на 21;
 - остаток 12 при делении на 19;
 - остаток 19 при делении на 25.
- 829** Отметьте на числовой прямой три положительных и три отрицательных целых числа, которые:
- при делении на 5 дают остаток 3;
 - при делении на 6 дают остаток 4;
 - при делении на (-3) дают остаток 2;
 - при делении на (-7) дают остаток 1.
- 830** Найдите неполное частное и остаток при делении на (-12) следующих чисел:
- 29;
 - -36 ;
 - -42 ;
 - 134;
 - -218 ;
 - -287 .
- 831** Разбейте множество целых чисел на классы по их остаткам при делении на:
- 4;
 - 7.

832 Сравните значения числовых выражений:

- а) $\frac{94}{189}$ и $\frac{97}{193}$; г) $0,416$ и $\frac{5}{12}$; ж) $\frac{27}{41}$ и $\frac{11}{41} \cdot \frac{27}{10}$;
 б) $\frac{1}{1235}$ и $\frac{2}{2467}$; д) $-0,(53)$ и $-0,535$; з) $5\frac{4}{7}$ и $5\frac{4}{7} \cdot \frac{8}{9}$;
 в) $\frac{198}{199}$ и $\frac{197}{198}$; е) $-0,(636)$ и $-\frac{7}{11}$; и) $567,99 \cdot 1,01$ и $567,99$.

833 Запишите рациональное число в виде периодической десятичной дроби:

- а) $5,8$; б) $-\frac{7}{9}$; в) $\frac{56}{33}$; г) $-3\frac{13}{18}$; д) $\frac{23}{24}$; е) $-1\frac{5}{13}$.

834 Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

- а) $0,(4)$; в) $-4,(541)$; д) $-6,24(6)$;
 б) $-1,(27)$; г) $5,0(39)$; е) $3,579(31)$.

835 а) Два почтальона, работая вместе, разнесли все телеграммы за 5 часов. Зная, что производительность первого почтальона составляет 150% от производительности второго, определите, сколько часов потребовалось бы первому почтальону, чтобы разнести эти телеграммы самостоятельно.



б) Для погрузочно-разгрузочных работ на складе используются 2 погрузчика. Первый погрузчик может выполнить заданный объем работы за 8 часов. Производительность второго погрузчика на 60% больше первого. Сколько времени понадобится этим двум погрузчикам на выполнение данного объема работы, если они будут работать вместе?

в) Катя съедает банку варенья за 8 часов, Марина – за 6, а Коля – за 4. За какое время съедят эту банку варенья Катя, Марина и Коля вместе?

г) Первый насос наполняет пустой бассейн за 8 часов, а второй насос выкачивает всю воду из бассейна за 18 часов. Считая, что скорости работы насосов постоянны, определите, за какое время будет наполнен этот бассейн, если он пустой и оба насоса начнут работать одновременно.

д) В переплетной мастерской все мастера работают с одинаковой производительностью. Семь стажеров и три мастера выполняют за 5 часов тот же объем работы, что десять стажеров и восемь мастеров за 2 часа. Во сколько раз производительность мастера больше производительности стажера, если производительность всех стажеров также одинаковая?

836 Переведите в указанные единицы измерения и вычислите:

а) в килограммы:

$$0,4 \text{ т} \cdot 35,6 - (5,6 + 11,2) : 8000 \text{ г} + 0,9 \text{ ц} \cdot (35,3 - 24,7) + 8,1 \text{ кг};$$

б) в миллиметры:

$$9,26 \text{ м} : 0,4 + 21,645 \text{ см} : 1,3 + 29,5 \text{ мм} + 4,3 \text{ дм} \cdot 0,2 - 0,000032 \text{ км};$$

в) в минуты:

$$928,5 \text{ мин} : 5 + 14,2 \text{ ч} \cdot 1,5 - 32 \text{ 568 с} : 4.$$

837 Сравните значения величин:

- а) 59 м 28 дм 56 см и 601 дм 576 мм; в) 49 т 627 кг и 514 ц 26 кг;
б) 4 сут. 14 ч 95 мин и 112 ч 15 мин; г) 25 а 79 м² и 0,2 га 7а 53 м².

838 Упростите выражение:

- а) $-(2a - 11b) - (4 + 3(b - 3a)) - 2(3a + 4b - 3)$;
б) $7c - 11d + ((-3c - 4(2d + 3)) - (4d - 2(7 + 4c))) - 3(c - 5d)$;
в) $9p + (7p - 11q) + 3(4p + 3q - (2p + 3(-q + 2p)) - 3p)$;
г) $-4k + 2(3m - 0,5(6n - 8k)) - (7k - 3(k - 2(m - n))) + 2(4m + 2n - 3(2m + k))$;
д) $\left(\frac{1}{9}rs - 5\frac{1}{2}r^2\right) - \left(\frac{7}{18}rs - 3\frac{1}{4}r^2\right) - \left(-\frac{8}{27}rs - 1,25r^2\right)$.

839 Определите, каким числом – положительным или отрицательным – является выражение:

- а) $(-21)^{99}$; б) $\left(-\frac{3}{11}\right)^3$; в) $(-5,9)^{139} \cdot (-2,36)^{318}$; г) $\left(-\frac{6}{17}\right)^{101} : (-76,9)^{315}$.

840 Сравните степени рациональных чисел:

- а) 9^{31} и 9^{32} ; в) $\left(\frac{5}{6}\right)^{18}$ и $\left(\frac{5}{6}\right)^{19}$; д) $8,27^9$ и $8,27^{10}$;
б) $(-9)^{19}$ и $(-9)^{20}$; г) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{25}$ и $\left(-\frac{5}{6}\right)^{26}$; е) $(-8,27)^{16}$ и $(-8,27)^{17}$.

841 Найдите значение выражения:

- а) $((-4)^2 + (-1)^7 \cdot 7) : (-3)^2$; в) $0,5 \cdot (-0,1)^2 : 0,001 - (0,9^3 : (-0,9)^3)^4$;
б) $-3 \cdot (-2)^3 : 1\frac{3}{5} + (-7^2 : \left(\frac{7}{3}\right)^2)$; г) $\frac{(25^2 : 5^3) \cdot 3^{14} \cdot 7^5 \cdot (7^2)^9 \cdot \left(\frac{15^{21}}{15^{12}}\right)}{7^{19} \cdot (7^{12} : 7^8) \cdot 3^{22} \cdot 5^9} - 78^0$.

842 Представьте выражение в виде степени с показателем, отличным от 1, при целых значениях переменных:

- а) $5^7 \cdot 5^{11} \cdot 5$; д) $(-ab)^6 \cdot (-ab) \cdot (-ab)^8 \cdot (-ab)^3 \cdot (-ab)^0$;
б) $x^{12} : x^4$; е) $c^{27} : c^{13} \cdot c^{15} \cdot c^7 : c^8$;
в) $((-p)^7)^9$; ж) $(-d)^7 \cdot (-d)^{16} : (-d)^9 \cdot (-d)^8 : (-d)^{11}$;
г) $((-q)^4)^5$; з) $(6m - 7n)^{32} : (6m - 7n)^{23} : (6m - 7n)^5$.



843 Запишите многочлен в стандартном виде, определите его степень, старший и свободный члены. Найдите его значение при указанных значениях переменных.

- а) $-5x^3 + 8x^2y - 2y + 5x^3 - 9x^2y + 7$ при $x = -1$, $y = -1$;
б) $9a^7 - 12ab - 11b^5 + (-7a^7 + 15ab - 3b^5) - 8 - 2a^7 - 4ab + 14b^5$ при $a = 2$, $b = -1$.

844 Найдите сумму и разность многочленов P и Q :

- а) $P = a^4 + 2a^2b - a^2b^2 - 4ab^3$, б) $P = \frac{5}{6}m^2 + 1\frac{2}{3}mn + \frac{3}{4}n^2$,
 $Q = a^4 - 3a^2b + a^2b^2 + 2ab^3$; $Q = -\frac{5}{12}m^2 - 1\frac{1}{3}mn - 1\frac{3}{4}n^2$.

845 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

- а) $(3y^2 + 2xy - y^2)(2x^2 - xy)$; б) $(5p^2 + 6p + 2)(3p^2 - 2p - 7)$;
 в) $(m^2 + 7mn + 2n^2)(4m - 5n)$; г) $(2q^2 + 8q + 1)(q^2 - 4q + 1)$.

846 а) Стоимость производственного оборудования после 10 лет эксплуатации равна 600 тыс. р., что составляет $\frac{3}{28}$ его первоначальной стоимости. Чему была равна первоначальная стоимость этого оборудования?

б) Бананы при сушке теряют $\frac{12}{17}$ своего веса. Сколько сушеных бананов получится из 68 кг свежих?

в) В ассортименте книжного магазина среди 5250 наименований продукции имеется всего 210 наименований журналов. Какую часть в ассортименте этого книжного магазина составляют журналы?

г) На празднике по поводу окончания учебного года концерт занял $\frac{2}{7}$ всего праздника, праздничная дискотека — $\frac{5}{14}$ праздника, игры на улице — $\frac{1}{4}$ часть праздника, а оставшееся время было посвящено поздравлению школьников. Сколько времени проходил праздник, если школьников поздравляли 30 мин?

847 а) Переводчик перевел 156 страниц, что составило 39% полученного для перевода текста. Сколько всего страниц в полученном тексте?

б) Продавцу надо разложить 585 коробок конфет на две витрины так, чтобы число коробок с конфетами на одной витрине составляло 56% числа коробок на другой витрине. Сколько коробок конфет должен положить продавец на каждую из этих витрин?

в) В театре вместимостью 680 зрителей на вечернем спектакле оказались занятыми лишь 476 мест. Какой процент от общего количества мест составили на этом спектакле свободные места?

г) При проведении распродажи товара цену на него сначала снизили на 30%, затем новую цену снизили еще на 25%, а затем провели снижение еще на 10%. Как изменилась цена товара?

848 Решите уравнение:

- а) $11x + 18 - 23x = 39 - 17x - 41$;
 б) $45 = 23y - 9y + 7y - 6y - 15y$;
 в) $5,7z + 12,3z = 5,9z + 66 - 9,9z$;
 г) $17,4r - 16 = 32 + 67,8r + 4,6r - 53$;
 д) $5(4q - 3) - 8q = 21q - 3(3q + 5)$;
 е) $3p - 2(3p - 4) - 4p = 19p - 5(2p + 4)$;
 ж) $13(n + 9) = 39(2 - 3n)$;
 з) $28(m - 9) = 35(4 + 2m)$;
 и) $|-5,6|a - (0,3a - 7)| = |-3,4| \cdot (a - 2) + |-1,1| \cdot (-a)$;
 к) $5 - ((b - 4) - 2(b + 3)) - 4b + 3(4b - 5(b - (3b - 2))) = 24$.



849 Найдите корни уравнения:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{x}{3} - 9 = 11; & \text{в) } \frac{3z - 5}{7} = 6 - \frac{2z + 7}{2}; & \text{д) } \frac{4}{q - 3} = \frac{9}{q - 5}; \\ \text{б) } \frac{2y - 3}{5} = \frac{7y + 6}{4}; & \text{г) } \frac{r - 5}{3} + \frac{r - 3}{2} - \frac{r - 1}{4} = \frac{r + 7}{12}; & \text{е) } \frac{n - 2}{n + 5} = \frac{n + 3}{n - 4}. \end{array}$$

850 а) Из четырех чисел первые три относятся как $1,4 : 2,6 : 7$, а четвертое составляет 25% третьего. Найдите эти числа, если известно, что третье число на 55 больше суммы всех остальных.

б) В зоопарке живут только медведи, гепарды и антилопы. При этом число медведей, гепардов и антилоп в зоопарке относится как $3,5 : 5,2 : 6,3$. Сколько гепардов в этом зоопарке, если в нем всего 150 животных?

в) Имеется два куска сплава меди и олова с процентным содержанием олова 10% и 25% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 21% олова?

г) В каком отношении нужно смешать 20%-й и 15%-й раствор соляной кислоты, чтобы получить 17%-й раствор соляной кислоты?

851 Возведите двучлены в квадрат:

$$\text{а) } (2a + 7b)^2; \quad \text{б) } (-3c - 4d)^2; \quad \text{в) } (-5x + 9)^2; \quad \text{г) } (8m^3 + 6n)^2.$$

852 Возведите двучлены в куб:

$$\text{а) } (3x + 1)^3; \quad \text{б) } (2a - 5b)^3; \quad \text{в) } (-m + 6)^3; \quad \text{г) } (-4n - 3y)^3.$$

853 Запишите выражение как многочлен стандартного вида:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 4b(b + 9)(9 - b); & \text{ж) } (a + 5)(-a - 5)^2; \\ \text{б) } y^2(-y - 6)(6 + y); & \text{з) } 8(-y^3 - 2)(y^6 - 2y^3 + 4); \\ \text{в) } 3t(-t + 2)(-t - 2)(t^2 - 4); & \text{и) } x^2(x^2 - 6)(x^4 + 6x^2 + 36); \\ \text{г) } (3c - d)(3c + d)(9c^2 - d^2); & \text{к) } (-b - 3)(9 - 3b + b^2); \\ \text{д) } x^2(x^2 + 16)(x - 4)(4 + x); & \text{л) } (t + 2)(t - 2)(t^4 + 4t^2 + 16); \\ \text{е) } (a + 7)(a^2 - 7a + 49); & \text{м) } (z + 1)(z - 1)(z^4 + 1 + z^2). \end{array}$$

854 Представьте трехчлен как квадрат двучлена:

$$\text{а) } 4x^2 - 36xy + 81y^2; \quad \text{б) } 49a^2 + 84ab + 36b^2; \quad \text{в) } -24cd + 9c^2 + 16d^2.$$

855 Какие одночлены можно подставить вместо A , B и C , чтобы получившееся равенство стало тождеством?

$$\text{а) } (5x + A)^2 = B + C + 121y^2; \quad \text{б) } (9z - A)^2 = B - 126zt + C.$$

856 Подберите A таким образом, чтобы трехчлен можно было записать в виде квадрата двучлена:

$$\text{а) } x^2 - 10xy + A; \quad \text{б) } 36z^2 - A + 81t^2; \quad \text{в) } A + 16a^2 + 48ab; \quad \text{г) } -A + 49c^2 + 25d^2.$$

857 Представьте многочлен как куб двучлена:

$$\text{а) } 64a^3 + 48a^2 + 12a + 1; \quad \text{б) } 60c^2d - 8c^3 - 150cd^2 + 125d^3.$$

858 Сократите дробь при допустимых значениях переменных:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{121a^2 - 144b^2}{11a + 12b}; & \text{г) } \frac{25p^2 - 81q^2}{25p^2 + 90pq + 81q^2}; & \text{ж) } \frac{6x + y}{216x^3 + 108x^2y + 18xy^2 + y^3}; \\ \text{б) } \frac{4x^2 + 28xy + 49y^2}{2x + 7y}; & \text{д) } \frac{64p^3 + 8q^3}{16p^2 - 4q^2}; & \text{з) } \frac{8a^3 - 12a^2 + 6a - 1}{4a^2 - 4a + 1}; \\ \text{в) } \frac{ab + 7a - 3b - 21}{b^2 + 14b + 49}; & \text{е) } \frac{27a^3 - 125b^3}{9a^2 + 15ab + 25b^2}; & \text{и) } \frac{c^3 + 9c^2d + 27cd^2 + 27d^3}{c^2 - 9d^2}. \end{array}$$

859 Разложите многочлен на множители:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 11x + 11y + 9xz + 9yz; & \text{е) } x^2(x - 7) + 5x(x - 7) + 6x - 42; \\ \text{б) } 2pq + 3qr + 3rs + 2ps; & \text{ж) } y^2(y + 3) + 6y(y + 3) + 8y + 24; \\ \text{в) } 8z^2 - 12z - 8zx + 12x; & \text{з) } 27a^3b^6 + 27a^2b^4c^2 + 9ab^2c^4 + c^6; \\ \text{г) } 9x^2y + y^3 + 9xy^2 + x^3; & \text{и) } 4m^2 - p^2 + 9n^2 - 16q^2 - 12mn - 8pq; \\ \text{д) } 6pq^2 - q^3 - 6p^2q + p^3; & \text{к) } 25x^2 + 4y^2 - 36z^2 - 49t^2 + 20xy + 84zt. \end{array}$$

860 Разложите многочлен на множители, выделяя полный квадрат:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } a^2 - 16a + 63; & \text{б) } x^2 + 13xy + 36y^2; & \text{в) } p^6 + p^3 - 56. \end{array}$$

861 Представьте выражение в виде произведения многочленов степени, большей 0:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } (a + 3)^2 - 9; & \text{г) } 216 + y^3; & \text{ж) } 49(x + 9)^2 - x^2; \\ \text{б) } (b - 6)^2 - 49; & \text{д) } -k^6 - 64k^3; & \text{з) } y^2(y - 12)^2 - 25y^4; \\ \text{в) } 64 - (2c - 7)^2; & \text{е) } (y + 3)^3 - 8; & \text{и) } (7b + 5)^3 + 64. \end{array}$$

862 а) Теплоход при движении по реке прошел расстояние от города А до города В за 8 часов. На обратный путь ему потребовалось 6 часов. Найдите собственную скорость движения теплохода, если скорость течения реки равнялась 2 км/ч. Найдите с точностью до сотых среднюю скорость движения теплохода.

б) Два катера плывут по реке навстречу друг другу. Собственная скорость первого катера равна 26 км/ч, а второго — 24 км/ч. Через сколько часов они встретятся, если в данный момент расстояние между ними 350 км?

в) Две лодки одновременно отплыли от одной речной пристани и поплыли с одинаковой собственной скоростью в противоположных направлениях. Через 4 часа лодки развернулись и поплыли навстречу друг другу. Через какое время после старта они встретятся?

г) Из пункта А вниз по течению поплыл пловец, через некоторое время он развернулся и через 1 час после старта приплыл обратно в пункт А. Сколько километров проплыл этот пловец, если его собственная скорость равна 5 км/ч, а скорость течения равна 1,5 км/ч?

863 Найдите значения выражения:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 61^2; & \text{г) } 133^2 - 67^2; & \text{ж) } \frac{57^3 - 23^3}{34} + 54 \cdot 23; \\ \text{б) } 19,9^2; & \text{д) } \frac{325^2 - 15^2}{309^2 - 1}; & \text{з) } \frac{97^2 - 13^2}{105^2 - 21^2 + 94 \cdot 84}; \\ \text{в) } 12\frac{1}{8} \cdot 11\frac{7}{8}; & \text{е) } 48^2 + 96 \cdot 52 + 52^2; & \text{и) } \frac{62^3 + 58^3}{120} - (62^2 + 58^2); \\ \text{к) } \left(7\frac{3}{11}\right)^3 + 3 \cdot \left(7\frac{3}{11}\right)^2 \cdot \left(2\frac{8}{11}\right) + 3 \cdot \left(7\frac{3}{11}\right) \cdot \left(2\frac{8}{11}\right)^2 + \left(2\frac{8}{11}\right)^3. \end{array}$$

864 Решите уравнение, используя формулы сокращенного умножения:

а) $a^2 - 6a + 9 = 0$;

е) $m^3 + 12m^2 + 48m + 64 = 0$;

б) $(3b + 4)^2 - 64 = 0$;

ж) $n^3 + 8 = 0$;

в) $(c + 8)(c - 8) - (c + 6)^2 = -12$;

з) $(x^3 - 1) + (x - 1)^2 = 0$;

г) $12x(3x - 1) - (6x + 4)(6x - 4) = -2$;

и) $y^3 - (y + 5)^3 = 75 - 15y^2$;

д) $2(y + 7)^2 + (3y - 5)^2 - 11(y + 3)(y - 3) = 0$;

к) $8z^2(z - 2) - (2z - 3)^3 = 108 + 20z^2$.

865 Решите уравнение с модулем:

а) $|x + 4| = 9$;

г) $-\lvert 5 - 3a \rvert = -11$;

ж) $|x - 6| + |x - 2| = 12$;

б) $|2y - 3| = -5$;

д) $|b + 5| = -|b - 12|$;

з) $|7 + z| - |3 - z| = -4$;

в) $-\lvert 7 - 4z \rvert = 0$;

е) $|3c - 8| = |8 - 3c|$;

и) $|7k - 9 - 10k| = |6 - 2k + 3 - k|$.

866 Решите уравнение, выделяя полный квадрат:

а) $a^2 + 2a - 15 = 0$;

б) $b^2 - 12b + 35 = 0$;

в) $c^2 + 11c + 24 = 0$;

г) $d^2 + 8d + 17 = 0$.

867 а) На прямоугольном участке земли, длина которого на 18 м больше его ширины, построили дом, занимающий площадь 210 м^2 . Найдите длину этого участка, если известно, что площадь участка, не занятая домом, равна 70 м^2 .

б) Найдите периметр прямоугольника, ширина которого на 8 см меньше длины, а площадь равна 240 см^2 .



868 На координатной прямой Ox изобразите следующие промежутки, назовите их и запишите их обозначения:

а) $x < 7$; б) $x \geq -2$; в) $-3 < x < 6$; г) $-8 \leq x \leq -1$; д) $-5 < x \leq 4$.

869 Какие из чисел a , b , c и d расположены в промежутке:

а) $-6,9 \leq x \leq 7,3$, $a = -7$, $b = -6,9$, $c = 7,2$, $d = 7,3$;

б) $-9,5 \leq x < 3,4$, $a = -9,6$, $b = -9,5$, $c = -9,4$, $d = 3,4$;

в) $-12,6 < x < -1,4$, $a = -12,8$, $b = -12,6$, $c = -1,3$, $d = -1,5$?

870 Решите неравенство:

а) $0,3x \leq -6$;

ж) $4(5a + 7) + 7 < -11 - 3(3a + 4)$;

б) $-\frac{5}{7} > -10y$;

з) $7b + 2(5b - 3) \leq 4(2b + 3) + 9b$;

в) $11z - 3 < 41$;

и) $5,3c - 2,1(3c + 2) > -3,4(2 - 5c) - 5,4$;

г) $7 \geq -3 - 2k$;

к) $2,6d - 3(1,4d - 1,2) \leq 7,2 - 2,7(d + 2)$;

д) $-3r - 11 > r - 5 - 4r$;

л) $9(5 - 17m) \leq -54(3 - m)$;

е) $4s + 8 - 9s \leq 19 - 5s - 11$;

м) $-17(9n - 21) > -68(4 - 2n)$.

871 Найдите множество решений неравенства:

- а) $\frac{x}{3} + 5 > 11$; в) $-\frac{m}{4} + 3 \geq -\frac{m}{9} - 2$; д) $\frac{3a-4}{9} \leq \frac{2a+5}{6}$;
 б) $-\frac{5y}{7} + 11 \leq -y - 1$; г) $7 - \frac{n}{5} < \frac{n}{2} + 9$; е) $\frac{2-2b}{4} - \frac{1}{3} > -\frac{4b+1}{8} + 6$.

872 Решите неравенство, содержащее модули:

- а) $|x + 5| < 9$; в) $|3 - 4z| \leq -17$; д) $|4a - 12| > |5a + 20|$;
 б) $|2y - 7| \geq 3$; г) $|-6p - 93| < |64 + 8p|$; е) $|12b + 2 - 9b| \leq |4 - 3b - 10|$.

873 а) Проехав половину пути, автомобилист уменьшил скорость на 15% и поэтому прибыл в пункт назначения на 0,5 часа позже запланированного. Сколько времени он ехал?

б) Два грузовика выехали одновременно в одном направлении из двух городов А и В, находящихся на расстоянии 160 км друг от друга. Скорость одного грузовика была равна 50 км/ч. Чему была равна скорость другого грузовика, если встреча грузовиков состоялась через 8 часов? (Рассмотрите все возможные варианты.)

в) Расстояние между пунктами А и В равно 1500 м. Два велосипедиста выехали одновременно в противоположных направлениях из А и из В. Скорость первого велосипедиста была равна 15 км/ч. С какой скоростью ехал второй велосипедист, если через 3 часа расстояние между ними стало равно 76,5 км?

г) Из пункта А в пункт В вышел пешеход со скоростью 5 км/ч. Через 2 часа после этого из В в А выехал автомобиль, который встретил пешехода через 3 часа после своего выезда из В. С какой скоростью ехал автомобиль, если расстояние между А и В равно 274 км?

874 Упростите выражение при допустимых значениях переменных и найдите его значение:

а) $(3a - (5ab + 8a)) - 9ab + 5a - (11 - (17 - (9 - 14ab))) + 5$, если $a = -6,7$, $b = 8,4$;

б) $\frac{9x^2y - 7xy^2 - (8x^2y - 8xy^2)}{7x^3y^4} \cdot \frac{63x^5y^3}{(9x + 9y)}$, если $x = 6$, $y = -12$;

в) $\frac{7^{52} \cdot (d^{48} : d^{25}) \cdot c^{12} \cdot c^{23} \cdot (dc)^{72}}{d^5 \cdot c^{37} \cdot (c^{46} : c^{29}) \cdot (c^3)^7 \cdot c^{31} \cdot (7d)^{51} \cdot d^{39}} - 11(cd)^0$, если $d = 17$, $c = 3$;

г) $p^2q^2 \cdot (4p^3 - 5p^2 - 7pq - 9) - 5p^2q \cdot (p^3q - p^2q - 2pq^2 - 2q)$, если $p = -1$, $q = 1$;

д) $-(3a + 7)(3a + 5) + (3a + 6)^2$, если $a = -95,638$;

е) $125a^3 - 225a^2 + 135a - 27$, если $a = 2$;

ж) $b(b + 7)(b - 7) - (b - 5)(b^2 + 5b + 25)$, если $b = -\frac{5}{49}$;

з) $6(c + 1)^2 + (c + 6)(c^2 - 6c + 36) - (c + 2)^3$, если $c = -749$;

и) $7q + p^2 - pq - 7p$, если $p = 0,5$; $q = -2,5$;

к) $4m^2 + 3n - 4mn - 3m$, если $m = -1,5$; $n = 1,5$.



875 Определите, при каких значениях переменных имеет смысл выражение:

а) $\frac{1}{6x \cdot 9y}$; б) $\frac{1}{5a^4b^2} - \frac{1}{(a-7)(b-4)}$; в) $\frac{p-5}{(p+6)(p-5)}$; г) $\frac{m^3n^4}{(n-11)} \cdot \frac{(m-3)}{m^2n}$.

876 Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

а) $\frac{5ab}{9xy} : \frac{2ax}{9by}$; б) $3ab : \frac{9aby}{4y^2}$; в) $6x : (5x - 2y) : 3y \cdot (2y - 5x)$;
 г) $\left(\frac{49xy}{14ab} \cdot \frac{24ab^2}{56xy^2}\right) : \frac{1}{yb}$; д) $(a^2b^2) : (6b - 7) \cdot (18ab - 21a) : b^2$.

877 На координатной плоскости Oxy изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $x > 5$; $y \leq -3$; б) $x \leq -4$; $y > 6$; в) $2 \leq x + 7 \leq 8$; $-9 \leq y - 4 \leq 2$.

878 Зависимость y от x задана таблицей. Найдите ее область определения и область значений. Определите, является ли эта зависимость функцией, и обоснуйте свой ответ.

а)

x	-5	-2	1	3	7
y	9	8	0	8	9

б)

x	1	2	0	1	2
y	5	6	0	6	5

879 Задайте зависимость пути s (в километрах), который проехал автомобиль с постоянной скоростью 80 км/ч, от времени движения t (в часах). Укажите ее область определения и область значений. Определите, является ли данная зависимость функцией. Найдите значение величины зависимой переменной при указанных значениях независимой переменной:

а) $t = 4$ ч; б) $t = 3$ ч 10 мин; в) $t = 5$ ч 15 мин; г) $t = 6$ ч 30 мин.

880 Функция задана словесным описанием. Найдите ее значения в точках x_1 , x_2 и x_3 .

а) Всем числам, кратным 7, поставлено в соответствие число 0, а всем числам, которые не делятся на 7, поставлено в соответствие число -1.

$$x_1 = 46; x_2 = -42; x_3 = 0.$$

б) Всем отрицательным рациональным числам поставлено в соответствие число (-2), а всем неотрицательным числам - число 2.

$$x_1 = -9,7; x_2 = 15,8; x_3 = 0.$$

881 Функция задана формулой. Найдите ее область определения:

а) $y = x^2$; б) $y = \frac{5}{3x-6}$; в) $y = \frac{x+9}{(x-3)(2x+5)}$; г) $y = \frac{2(x-12)}{3x(x+12)}$;
 д) $y = -7x + 3$; е) $y = \frac{7x+14}{9}$; ж) $y = \frac{8x^2}{11x}$; з) $y = 17 : x^3$.

882 Функция задана формулой. Найдите ее значение в точках x_1 , x_2 и x_3 .

а) $y = -2x + 5$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2,5$; $x_3 = -1$; б) $y = 5x^2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$;

в) $y = \frac{4}{x-3}$; $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = 4$; г) $y = \frac{4x-5}{9}$; $x_1 = 1$; $x_2 = 1,25$; $x_3 = -1$.

883 Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$, если:

а) $k = 4$; б) $k = -2$; в) $k = -1,5$.

- 884** Точка $A(p; q)$ принадлежит графику функции $y = kx$. Найдите коэффициент пропорциональности k и постройте график данной функции, если:
- а) $p = 1, q = -5$; б) $p = -2, q = 6$; в) $p = -3, q = -1,5$.
- 885** Принадлежат ли графику функции $y = kx$ точки A и B , если:
- а) $k = 6, A(0; 3), B(-1; -6)$; б) $k = -4, A(-1; 4), B(2; 8)$.
- 886** Не строя графика зависимости $y = kx$, определите, в каких координатных четвертях он будет расположен, если: а) $k = 12,8$; б) $k = -21,3$.
- 887** Постройте график функции $y = f(x)$.
- а) $f(x) = -4x - 5$; б) $f(x) = 1,5x + 3$; в) $f(x) = 6 - 4x$.
- 888** Не строя графика функции $y = f(x)$, определите, проходит ли он через точку A :
- а) $f(x) = 6x - 7, A(2; 5)$; в) $f(x) = -7x + 2, A(-4; -26)$;
 б) $f(x) = 5,2x + 9, A(-5; 35)$; г) $f(x) = -3x - 8, A(-4; 4)$.
- 889** Постройте график прямой пропорциональной зависимости $y = kx$. Используя полученный график, постройте график линейной зависимости $y = kx + b$, если:
- а) $k = -2, b = 3$; б) $k = 3, b = -2$; в) $k = 1,5, b = -4$; г) $k = -2,5, b = 2$.
- 890** Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :
- а) $f(x) = 9x + 12$; б) $f(x) = -4x + 22$; в) $f(x) = 7x - 28$.
- 891** Постройте график кусочно-линейной функции:
- а) $y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x \geq -4; \\ -x - 5, & \text{если } x < -4 \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -4x + 1, & \text{если } x \geq 2; \\ -7, & \text{если } -2 \leq x < 2; \\ 2x - 3, & \text{если } x < -2 \end{cases}$
- 892** Принадлежат ли графику кусочно-линейной функции точки A и B , если:
- а) $y = \begin{cases} 5x - 2, & \text{если } x \geq 3; \\ 16 - x, & \text{если } x < 3 \end{cases}$ $A(2; 8), B(-1; 17)$;
 б) $y = \begin{cases} 9x + 6, & \text{если } x \geq -1; \\ -4 - x, & \text{если } x < -1 \end{cases}$ $A(1; 15), B(-2; -2)$.
- 893** Определите, не строя график функции $y = f(x)$, проходит ли он через точку A :
- а) $f(x) = |3x - 11|, A(1; -8)$; б) $f(x) = |5x + 7| - 12, A(-3; -4)$.
- 894** Не выполняя построение графика функции $y = f(x)$, найдите координаты его точек пересечения с осями координат Ox и Oy :
- а) $f(x) = |x + 9|$; б) $f(x) = |x - 16|$; в) $f(x) = |x - 4| + 3$; г) $f(x) = |11 - x| - 7$.
- 895** Постройте график функции $y = f(x)$.
- а) $f(x) = |x - 5|$; б) $f(x) = |x + 8|$; в) $f(x) = 5|x| - 6$; г) $f(x) = |x - 7| + 4$.
- 896** а) В компании 12 отделов, в которых работает 80 человек. Докажите, что в этой компании есть хотя бы один отдел, в котором работает не менее 7 человек.
 б) Девять плотников сделали 35 столов. Докажите, что хотя бы два плотника сделали одинаковое количество столов.

- 897** а) У продавца есть гири весом только 150 г и 180 г. Как отвесить на чашечных весах за одно взвешивание 3,9 кг яблок, используя в общей сложности наименьшее количество гирь, если класть гири на одну чашку весов?
 б) На складе имеются мешки вместимостью 12 кг и 16 кг. Какие мешки надо приготовить, чтобы положить в них 252 кг морковки так, чтобы все мешки оказались полными и чтобы при этом количество всех мешков было минимальным?
- 898** а) Сколько различных шестизначных цифровых кодов, цифры в которых не повторяются, можно составить из цифр 9, 7, 5, 3, 2, 1?
 б) В магазине продается 12 видов блокнотов и 8 различных наборов красок. Сколькими способами можно купить в этом магазине блокнот и набор красок?
 в) У Кости семь различных наклеек. Сколькими способами он может положить все эти наклейки в ряд?
 г) В библиотеке 9 книг о путешествиях, 6 книг о животных и 4 книги по авиа-моделированию. Сколькими способами можно взять в этой библиотеке книгу о путешествиях, книгу о животных и книгу по авиамоделированию?
 д) Сколькими способами можно разместить в одном ряду три различных значка и пять различных марок так, чтобы все марки лежали рядом?
 е) Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 2, можно составить из цифр 2, 5, 6, 7, 9, если цифры в искомом числе не повторяются?
- 899** а) Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых встречаются только цифры 1, 4, 7?
 б) Алфавит туземного племени состоит из букв «П», «Ю», «Я», «Е», «У». Словом в этом языке является любая последовательность из четырех букв. Какое максимальное количество слов может быть в языке этого туземного племени?
 в) Номера квартир в доме состоят не более чем из четырех цифр и не содержат цифр 0, 2, 5 и 6. Может ли в этом доме быть 1500 квартир?
 г) Известно, что код сейфа является последовательностью цифр 1, 4, 9, 0 длиной не более шести символов. Сколько существует вариантов такого кода?
- 900** Таблица, приведенная ниже, является отчетом о дневных продажах в некоторой компании. Пользуясь представленной информацией, определите:
 1) Какую выручку получили от продаж кофе в зернах?
 2) За какой продукт была получена наибольшая выручка и чему она равна?
 3) За какой продукт была получена наименьшая выручка и чему она равна?
 4) Какую выручку получили в этот день от всех продаж?

Отчет о продажах

Наименование продукта	Единица измерения	Цена за единицу	Продано (в установленных единицах)
Кофе в зернах	килограмм	350 р.	12
Кофе молотый	килограмм	420 р.	15
Кофе в вакуумной упаковке	килограмм	540 р.	24
Кофейная смесь	килограмм	180 р.	10
Кофе растворимый	килограмм	800 р.	20

Выберите единицы измерения и постройте столбчатую диаграмму, иллюстрирующую зависимость полученной выручки от вида продукта.

Задачи для самоконтроля по курсу 7 класса

- 901** При проведении опроса старшеклассников одной из школ на вопрос: «Какую специальность вы хотели бы получить в будущем?» – были получены следующие ответы:

Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа	Вариант ответа	Доля выбравших данный вариант ответа
Инженер	5%	Педагог	5%
Ученый	10%	Врач	15%
Экономист	20%	Рабочий	10%
Юрист	15%	Другое	20%

По представленным данным постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую ответы участников данного опроса.

- 902** Команда КВН по результатам различных конкурсов получила следующие баллы:

Конкурс	Баллы
Приветствие	5,3
Конкурс капитанов	4,6
Видеоконкурс	6,2
Музыкальный конкурс	5,3
Домашнее задание	6,8



Найдите средний результат этой команды, моду, размах и медиану представленного числового набора.

- 903** При проведении социологического опроса был задан вопрос: «Кто является вашим любимым писателем, мастером детективного жанра?» Ответ «Агата Кристи» выбрали 56 человек. После подсчета оказалось, что частота данного ответа среди всех ответов, полученных на данный вопрос, равна 0,35. Сколько человек принимало участие в этом опросе? Сколько человек назвали других писателей?

- 904** Бросают два игральных кубика. Вычислите вероятность того, что:
- сумма очков на выпавших гранях нечетная и на одном из кубиков выпало 3 очка;
 - сумма очков, выпавших на верхних гранях, не больше 9.

- 905**
- Каждую из 33 букв русского алфавита записывают на отдельной карточке и тщательно перемешивают. Вычислите вероятность того, что при вытаскивании одной карточки на ней будет написана одна из букв слова «ГОЛОВОЛОМКА».
 - На экзамене по географии 64 билета. Ваня не успел выучить 6 билетов. Вычислите вероятность того, что, взяв экзаменационный билет наугад, Ваня вытянет билет, который он успел выучить.
 - На шарах написаны целые числа от 1 до 250. Шары положили в мешок и перемешали, а затем, не глядя в мешок, из него вытащили один шар. Вычислите вероятность того, что число на вытащенном шаре делится на 12 и на 5.

- 906** Сумма двух натуральных чисел равна 26. Первое число при делении на 9 дает остаток 3, а второе число при делении на 9 дает остаток 5. Найдите эти числа.

907 Запишите на языке сравнений следующие высказывания и докажите их истинность:

- а) Число 62 458 делится на 11.
 б) Число 100 851 при делении на 17 дает остаток 7.
 в) Числа 125 000 и 441 800 дают одинаковые остатки при делении на 99.

908 Найдите наименьшее натуральное число, сравнимое с числом 214 по модулю:

- а) 3; б) 4; в) 5; г) 7; д) 9; е) 11.

909 Выполните указанное действие по модулю m :

- а) $11 + 17, m = 3$; в) $19 - 67, m = 3$; д) $16 \cdot 25, m = 11$;
 б) $94 - 56, m = 5$; г) $5 \cdot 28, m = 9$; е) $5^4, m = 3$.

910 Найдите простые числа, лежащие между числами a и b :

- а) $a = 1200, b = 1210$; б) $a = 1320, b = 1330$.

911 Докажите утверждение:

- а) Если натуральное число делится на 7, то оно не может при делении на 21 давать остаток 5.
 б) Если натуральное число при делении на 36 дает остаток 4, то оно не делится на 6.

912 Проведите классификацию множества A по остаткам от деления его элементов на 3:

$$A = \{-46; -32; -25; -6; 0; 14; 29; 64; 93\}$$

913 Найдите остаток от деления a на b :

- а) $a = 7777^{999}, b = 3$; б) $a = 888^{444}, b = 9$.

914 Определите, какой цифрой оканчивается число:

- а) $333\,333^{254}$; б) $125\,787^{5987}$; в) $3599^{678^{131}}$; г) $12^{91^{1991}}$.

915 Нарисуйте диаграмму Эйлера–Венна для множеств A и B . Найдите их пересечение и объединение:

$$A = \{a: a = 5n + 2; n \in N; 1 \leq n < 6\}; \quad B = \{b: b = 7m + 5; m \in N; 1 \leq m \leq 4\}.$$

916 Известно, что точки A и B имеют соответственно координаты (-9) и 18 . Найдите координату точки C , если известно, что:

- а) $AC = BC$; б) $AC = 0,5BC$; в) $AC = 2BC$; г) $AC = 8BC$.

917 а) Сушеная клюква содержит 20% воды. Сколько воды надо выпарить из 20 т свежей клюквы, содержащей 75% воды, чтобы получить сушеную?

б) Кусок сплава меди и цинка массой 586 кг содержит 60% меди. Сколько меди надо добавить к этому куску, чтобы новый сплав содержал 90% меди?



Задачи для самоконтроля по курсу 7 класса

- 918** На сколько процентов число A меньше числа B ? На сколько процентов число B больше числа A ?

$$A = \frac{\left(\frac{5}{8} + 2,708(3)\right) : 2,5}{(1,3 + 0,7(6) + 0,(36)) \cdot \frac{110}{401}} \cdot \frac{1}{2}; \quad B = \frac{\left(2\frac{38}{45} - \frac{1}{15}\right) : 13\frac{8}{9} + 3\frac{3}{65} \cdot 0,(26)}{(18,5 - 13,(7)) \cdot \frac{9}{85}}.$$

- 919** Определите, является ли число рациональным:

- а) 0,345; в) 6,060060006; д) -9,09090909...;
б) -9,(12); г) -11,011001100011...; е) 3,324324324...

- 920** Найдите все значения x , удовлетворяющие равенству:

- а) $2^{2x} = 256$; б) $3^{3x} = 729$; в) $4^{x+1} = 1024$; г) $5^{x-4} = 625$.

- 921** Замените x степенью так, чтобы выполнялось равенство:

- а) $4^{15} \cdot 4^{27} = x$; в) $(2^5)^7 : x = 4^4$; д) $x \cdot (3^3)^4 = 3^{41}$;
б) $9^{53} \cdot x = 9^{62}$; г) $x : 6^{43} = 6^3$; е) $x : (12^3)^9 = 12^{14}$.

- 922** Докажите, что для любых целых a :

- а) если $a + 4$ делится на 7, то $3 + 6a$ делится на 7;
б) если $a - 5$ делится на 9, то $7 + 4a$ делится на 9.

- 923** Каким многочленом можно заменить K , чтобы указанное выражение стало многочленом степени n ?

- а) $9c^4 - 13c - 6c^3 - 5c^2 + 12c^3 + 4c^4 + K$, если $n = 2$;
б) $10ab^3 - 6b^2a - 14b^2a^2 + 4ab + 12a^2b^2 - K$, если $n = 3$.

- 924** Упростите выражение при допустимых значениях переменных:

- а) $(-5xy^3) : y^2 \cdot (-3yz) : (-15xz) \cdot (2xy) : (xy^2)$;

- б) $-\frac{35}{abc} \cdot (4ac : 5) : (7b^2c) \cdot (-2a^2b^2) \cdot (3c : 2b^2)$;

- в) $\frac{7st \cdot \frac{2}{7}tw - 5s \cdot stw + 3s^2tw - 4swt^2 - (9 + 5p - 12r) + 5p + 9 - 12r}{4sw(s + t)}.$

- 925** Докажите, что:

- а) $7^{21} + 7^{19}$ делится на 25; б) $81^3 - 3^9$ делится на 13.

- 926** Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$, если известно, что:

- а) $x + \frac{1}{x} = 6,5$; б) $x - \frac{1}{x} = 17,5$.

- 927** Докажите, что данный многочлен при любых значениях входящих в него букв принимает только положительные значения:

- а) $x^2 - 14x + 50$; б) $y^2 + z^2 - 12y - 8z + 55$.

- 928** Найдите наименьшее значение выражения:

- а) $(5a - 3)(5a + 3) + 4b(4b - 10a)$; б) $20c^2 - 24cd + 9d^2 - 20c + 28$.

- 929** Найдите наибольшее значение выражения:

- а) $2(x - 51) - (x - 3)(x + 3)$; б) $-13y^2 - 20yz - 25z^2 - 24y - 12$.

930 Найдите значение выражения:

а) $3(4 + 1)(4^2 + 1)(4^4 + 1)(4^8 + 1) - 4^{16}$; б) $9^8 - 8(9 + 1)(9^2 + 1)(9^4 + 1)$.

931 Постройте график кусочно-линейной функции:

$$y = \begin{cases} x - 7, & \text{если } x \geq 9; \\ -x + 10, & \text{если } 6 \leq x < 9; \\ x - 2, & \text{если } 2 \leq x < 6; \\ -x + 2, & \text{если } 0 \leq x < 2; \\ x + 2, & \text{если } -3 \leq x < 0; \\ -x - 4, & \text{если } x < -3 \end{cases}$$



932 Постройте график функции $y = f(x)$:

а) $f(x) = |x + 6| - |x - 7|$;

б) $f(x) = -|9 - x| - |x - 5|$.

933 Решите уравнение:

а) $\left(2y + \frac{3y}{7}\right) \cdot \frac{14}{17} + \left(3y + \frac{2y}{9}\right) \cdot \frac{27}{29} \cdot 13 = 39$; б) $4 - \frac{2y - \frac{7+y}{3}}{5} = \frac{4y}{15} - \frac{2y - \frac{4-3y}{5}}{3}$.

934 Решите уравнение с модулями:

а) $|x + 6| + |x - 7| + |x + 11| = 25$;

б) $|x + 4| + |x - 9| + |x + 8| + |x - 5| = 17$;

в) $|3t - 6| + |4t + 12| + |2t - 18| - |5t + 10| = 37$.

935 а) Целое число дает при делении на 4 остаток 2, а при делении на 7 – остаток 5. Найдите остаток от деления этого числа на 28.

б) Найдите все числа, которые при делении на 11 дают остаток 9, а при делении на 3 – остаток 2.

936 Числа m , n , $\frac{47}{3m + 7n}$ – натуральные. Найдите все пары чисел m и n , для которых это будет верно.

937 Решите неравенство:

а) $2b - \frac{4b - 2}{-3} < \frac{7 - 4b}{5}$;

б) $\frac{b - 7}{3} + \frac{b - 5}{9} - \frac{b - 1}{6} \geq \frac{b + 11}{18}$.

938 Решите неравенство, содержащее модули:

а) $|3n - 18| + |2n - 8| + |3n + 15| \leq 40$;

б) $|x + 12| + |x - 6| + |x + 3| + |x - 7| > 30$.

939 а) В школе имеется 6 различных кружков. Сколькими способами можно составить расписание кружков на один день так, чтобы в этот день проходили занятия 4 различных кружков?

б) Сколько четных номеров, состоящих не более чем из четырех цифр, можно составить из цифр 2, 5, 6, 7, 9?

в) Автомобильный номер некоторого государства устроен следующим образом: номер начинается с одной, двух, трех или четырех цифр, а затем идут четыре буквы. Каково максимальное количество автомобильных номеров, которые оканчиваются на две буквы этого алфавита АВ, если в алфавите этого государства 33 буквы и в номере могут быть использованы все десять арабских цифр?

10. а) 0,7; б) -1; в) 1,5; г) -1,5. 11. а) 6 и 30, или 17 и 19, или 28 и 8; б) 70° . 12. г) $-\frac{mn}{3} - \frac{4m}{9}$. 23. а) 1; б) -20.
 24. а) 2 и 53, или 16 и 39, или 30 и 25, или 44 и 11; б) 110° . 25. а) $2ke^2m - \frac{8}{9}kl^2m$; б) $\frac{4p}{7} - \frac{5q}{4} - \frac{r}{11}$. 31. Ангела.
 49. а) $\{-9; -5\}$; б) $\{-\frac{3}{7}; 1\frac{6}{7}\}$; в) $\{-6\frac{2}{3}; -4\}$. 50. а) $a^4 + a^2b^2 + b^4$; б) $3x^3y + 4x^2z$; в) $a^3 - 2ab^2 + b^3$; г) 0.
 52. а) Ил-96 - 870 км/ч, Су-34 - 1740 км/ч; б) 360 км; в) 600 м. 64. а) $\{1; 13\}$; б) $\{-2,4; 1,2\}$; в) $\{1\frac{5}{7}; 12\}$.
 65. а) $x^4 + x^2y^2 - y^4$; б) $y^3 - x^3$. 67. а) 60 км/ч, 90 км/ч; б) 13 км. 80. а) 4; б) $-54x^2y - 2y^3$; в) $r - pq$;
 г) $-m^2 + 4m - 6$. 81. д) $\frac{3}{a^2b}$; е) $\frac{5x^4y^3 - 4}{3x^4y^2 - 7x^2}$. 82. а) 90 и 126; б) 1710 тыс.р. 83. а) 0; б) 8; в) 1; г) 3; д) 5; е) 8;
 ж) 10; з) 14; и) 9. 84. а) 1; б) 1; в) 3. 91. а) $24a^2b + 2b^3$; б) $2p^2 - 7pq - 2q^2$. 92. а) $\frac{3a^2 + 4b^2}{6}$; б) $\frac{3n}{m}$; в) $\frac{6y - 5x^2}{7x^2y^4 - 3y^2}$.
 93. 300 тыс.р. 94. а) 3; б) 8; в) 7; г) 3; д) 9; е) 9. 95. а) 1; б) 10; в) 1. 113. а) 0,5; б) 150; в) 0,3; г) 2,5.
 118. а) $\{3\frac{1}{3}\}$; б) $\{1\}$; в) $\{-4,5; 4,5\}$; г) $\{-4; 8\}$. 119. а) 18 шт.; б) 3,969 кг; в) 790 л; г) 264 раза. 121. а) $\{1004; 3016\}$;
 б) $\{353; 377\}$. 122. а) 9; б) 4. 134 а) $\{1\}$; б) $\{1,25\}$; в) $\{-5; 3\}$; г) $\{-2\frac{2}{3}; 2\}$. 135. а) 645,25 кг; б) 245 кг.
 136. а) $\{-5; 11\}$; б) $\{0; 1032\}$. 137. а) 1; б) 6. 138. 3. 139. больше спорт. в 10 р. 140. 20 кг. 168. а) $4\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{9}$;
 в) 46; г) -13,5; д) 13,25; е) $-2\frac{29}{30}$. 173. в) $-p^2 + 4pq$; г) $2x^2y + 2xy^2 - 4y^3$. 174. а) 3; б) 1; в) 34; г) 15. 175.
 а) 240 г; б) 48,75%; в) 1079 и 1411; г) 600 и 162 или -600 и -162. 176. а) $\{2; 4,5\}$; б) $\emptyset$. 177. а) 8; б) 6.
 190. а) $13a^2 + 3a + 1$; б) $3b^2 - 4bc$. 191. а) -3; б) 7. 192. а) 3300 кг; б) 306 тыс. р. и 459 тыс. р. 193. $\{3,5; 35\}$.
 194. 1. 209. а) $\{-11; 1\}$; б) $\emptyset$; в) $\{-17; -3\}$; г) $\{11; 19\}$. 215. а) 10; б) 3; в) 37 м; г) 553,65 см. 216. в) $3mn$;
 г) $-2a^2b - a^2b^2 - 2ab^2$. 217. а) 17; б) -44. 219. а) 6; б) 1; в) 17; г) 8; д) 28; е) 63; ж) 12; з) 129. 220. а) $\{-6; 6\}$;
 б) $\{-11; 11\}$; в) $\{-0,4; 1,2\}$; г) $\{-2\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\}$; д) $\{0,25; 3,5\}$; е) $\{-4; -\frac{1}{3}\}$. 221. а) 2812,5 кг; б) 2,5 т; в) $\frac{9}{19}$.
 222. а) $\{-3; 6\}$; б) $\{-5; 7\}$; в) $\{4; 6\}$; г) $\{-9; -3\}$; д) $\{-8; 4\}$; е) $\{-7; 11\}$. 224. а) 5_7 ; б) 15_7 ; в) 41_7 ; г) 60_7 . 237. а) 2 кг;
 б) 11,06 м. 238. а) $-2p^4 - 2pq^3 - 2q$; б) $y^3 + xy$. 239. а) -9; б) -7. 241. а) 4; б) 11; в) 26; г) 59. 242. а) $\{-8; 8\}$;
 б) $\{-12; 12\}$; в) $\{-2; -4\frac{2}{3}\}$; г) $\{-3,25; 0,25\}$; д) $\{-\frac{2}{3}; 2,5\}$; е) $\{-0,875; 2,25\}$. 243. а) $\frac{5}{11}$; б) 175 кг. 245. а) 4_5 ;
 б) 34_5 ; в) 102_5 ; г) 123_5 . 246. а) $\{-6; 9\}$; б) $\{-8; -7\}$; в) $\{4; 15\}$; г) $\{-10; 7\}$. 248. 2 км. 249. 24. 265. а) 13;
 б) -20; в) 11; г) -21. 272. а) $\{3\}$; б) $\{-1\}$; в) $\{-13; -3\}$; г) $\{1; 5\}$; д) $\{-24; -3\frac{3}{7}\}$. 273. в) $-x^5 - y^4 + 2x^3y$;
 г) $-p^4 + 4q^4 - pq$. 274. а) 60 км/ч и 90 км/ч; б) 950 км; в) 18,75 км; г) 250 г; д) $\approx 16,9\%$. 275. а) $\frac{3xz}{y^2}$;
 б) $\frac{5q^6 - 7p^6}{8}$; в) $\frac{6b^6 - 7a^6}{4a^3 - 9b^3}$. 286. а) 3; б) 0; в) 9; г) 6; д) 18; е) 1. 287. а) 1; б) 1; в) 4. 295. б) $\emptyset$; е) -8; л) 15.
 296. б) -10; д) 7; е) 9. 297. г) $-\frac{1}{6}$; ж) 2; к) -1,6; м) -0,1. 298. б) 3; в) 2; г) 5. 299. б) 322; в) 108; г) 24.
 301. б) $1\frac{2}{3}$; д) $\frac{5}{7}$; е) -0,4. 302. б) 9; г) 6,5; д) 3; е) 1. 303. а) 2; в) 4; г) 2. 304. а) 8 лет; б) 15 и 30 чел.;
 в) фут. - 24 чел., баск. - 12 чел., вол. - 19 чел. 309. г) 1,2; д) 3; е) -3,5. 310. б) -1; г) -3; е) 13; ж) 2;
 и) 5; к) 8; л) 10; о) 4; п) 2. 311. а) 2400 р.; б) 30 стр., 45 букв; в) 27 км 840 м; г) 160 км. 312. б) -5; г) -2,5.
 315. в) 4; г) 1. 318. б) 0,9; в) 1; г) 7; е) 3; з) 5; к) 10; л) 2; м) 5. 319. а) 9; б) 17. 322. а) 264; б) 6,125; в) $17\frac{6}{7}$;
 г) $3\frac{13}{33}$; д) $1\frac{21}{23}$; е) $3\frac{50}{71}$; ж) 3; з) $\frac{5}{13}$. 323. б) 22; г) -30; д) 4; е) 3; ж) $-\frac{2}{3}$; з) $2\frac{2}{13}$. 326. а) 6; б) -64. 331. а) 37,5 р.;
 б) 45 лет. 334. в) 2; г) -2. 335. б) -26; в) 10; д) 5; е) 8. 336. б) 7; г) 10; д) 3; е) 5. 338. а) 5; б) $\frac{28}{29}$;

- в) 3; г) -2; д) 1; е) 6; ж) 5; з) -17. 339. б) $10\frac{1}{3}$; в) $-2\frac{2}{3}$. 342. а) 7; б) 12; в) 6; г) -17. 343. а) 6174; б) 72; в) 1. 345. в) -3; г) $1\frac{1}{3}$; д) -6; е) 4. 346. в) $1\frac{7}{9}$; г) $-\frac{23}{28}$. 349. а) 8 лет, 16 лет, 24 года; б) 48 км/ч; в) 21 с, 3 мин 9 с. 352. а) 24,5; б) $-\frac{9}{14}$; в) 1; г) 2. 353. б) -7; г) 5. 354. а) -190; б) -169. 358. 40 р. 364. ж) 0,5; з) 12,3; и) 28. 365. д) {0}; е) {0}; ж) {-7; 7}; з) $\emptyset$. 367. б) {1; 6}; д) {6}; ж) {1; 3}; и) {-0,6; 0,8}. 369. а) {-1}; г) {-5}; д) {4,5}; ж) $\{-\frac{1}{7}; 11\}$; з) $\emptyset$; и) {0; 2}; л) {-4}. 370. б) {-6; 1}; в) {0}; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $\emptyset$; е) {0,5; 9}. 371. в) {-9; 0,6}; г) $\emptyset$. 372. б) -2 и 1 или -6 и -3 или 3 и 6 или -1 и 2; в) -4 и 12 или 6 и 2; г) -2,5 и 2,5. 373. б) [-5; 2]; д) {4,5; 8,5}; ж) $\emptyset$; з) {-5}. 375. б) $\{-1\frac{6}{7}; 15\}$; в) $\emptyset$; д) {-6; 0,5}; е) [1; 2,5]; ж) {-0,75}; л) {0; 10}; м) {-1,25; 4,5}. 377. а) {-4; 4}; б) $\{-\frac{7}{17}; 2\frac{5}{7}\}$. 378. б) $\{3\frac{1}{3}; 8\}$; г) $\emptyset$; д) {2; 20}; е) {9; 15}. 380. а) {1,9; 2,5}; б) {5}; в) {1,375}; г) $\emptyset$. 382. б) {2,25}; в) [9; $+\infty$); д) $\emptyset$; е) [4; 8]; з) {8}. 383. а) {-1,75; -0,5}; б) {1,2; 6}; в) $\{-2\frac{1}{16}; -0,7\}$; д) $\emptyset$; е) $\{-3\frac{8}{11}; 5\}$. 385. а) 1; б) 2; г) 0. 388. в) n ; г) $p-14q$. 391. а) 8 ч 15 мин; б) 15 км/ч; в) 39 л; г) 16 ч 40 мин. 394. в) {6; 22}; е) {-5,5; -3,5}; ж) $\emptyset$; з) {1; 7}. 395. б) $\emptyset$; г) $\{\frac{d+8}{9}; \frac{d-8}{9}\}$. 396. б) {8}; в) $\emptyset$; г) {0,2}; д) {2}; е) $\{-1\frac{4}{7}; 7\}$. 397. в) {-14; $-\frac{2}{3}$ }. 398. а) $\{-\frac{4}{11}; 10\}$; б) {5}; в) {-3}. 399. а) [2; 5]; в) {-2; 10}; г) $\emptyset$. 400. б) {-1; 17}; г) {-8; -3,5}; д) $[-1\frac{2}{3}; +\infty)$; з) $\{2\frac{2}{3}; 6\}$. 401. а) {-10; 2}; б) {0; 8}. 402. а) 3 и 24 или -3 и -24; б) 3 и 13 или -3 и -13. 403. а) $\emptyset$; б) $\{5\frac{1}{3}; 10\}$; г) {-7; -5; 15}. 404. б) {2,6; $4\frac{7}{9}$ }; в) {0,5; $3\frac{5}{6}$ }; г) {3,4; $7\frac{2}{3}$ }. 405. а) $\emptyset$; б) {2}; г) {1; 7}; д) {-15; 4}; е) {3}; ж) $\{-3\frac{11}{19}; 6\}$; з) $\emptyset$. 408. в) $3x-y+z$; г) $14p-4q$. 411. а) 23 ч 45 мин; б) 7 яиц. 413. $-5\frac{1}{3}$. 414. 12 шт. 415. 19 шт. 419. а) (22; 1); (17; 3); (12; 5); (7; 7); (2; 9); б) (18; 1); (14; 4); (10; 7); (6; 10); (2; 13); в) (1; 16); (3; 9); (5; 2); г) (2; 16); (7; 7). 422. 7 гирек, 4 банки. 424. б) 6 б. по 0,7 л и 12 б. по 0,9 л; в) 12 б. по 0,7 л и 4 б. по 0,9 л. 425. а) 11; б) $12n+7, n \in \mathbb{Z}$; в) 51; г) $36n+14, n \in \mathbb{Z}$. 426. 246 шт. 427. 6 лет. 428. (4; 11); (11; 8); (18; 5); (25; 2). 432. а) вел. на 25%; б) ув. на 2,6%; в) ум. на 0,25%; г) ум. на 36%. 434. а) 3; б) 0. 439. 10 гирек по 200 г и 4 гирьки по 500 г. 440. б) 29 б. по 0,5 л и 15 б. по 0,7 л; в) 20 б. по 0,5 л и 10 б. по 0,7 л. 442. а) 11; б) $63n+11, n \in \mathbb{Z}$. 443. (3; 2). 446. а) ум. на 29,44%; б) марок на 12%; в) ум. на 28%; г) ум. на 37%. 448. а) -21; б) 5. 451. {-23; 13}. 454. 4 года. 464. е) [-24; $+\infty$); к) $(-\infty; 4,2]$; н) (-2; $+\infty$); о) [-6,5; $+\infty$); с) $(-\infty; -2)$; т) [-10; $+\infty$). 472. б) $(-\infty; -5]$; г) [-1,5; $+\infty$); д) $(-\infty; +\infty)$; з) (4,6; $+\infty$); м) $(-\infty; 8)$. 473. б) (2; $+\infty$); в) [3; $+\infty$); д) $(-\infty; 14)$; з) $(-\infty; 1\frac{1}{24}]$. 474. в) [-2; $+\infty$); г) $(-\infty; -19)$; е) $(-\infty; 1\frac{1}{6})$; з) $(-\infty; -6\frac{1}{3}]$; к) (-12; $+\infty$); м) $(-\infty; +\infty)$. 477. б) $(-\infty; -7,6)$; г) [-4; $+\infty$); е) $(-\infty; 5]$; з) (2; $+\infty$). 478. а) 0,5; г) -2,875; е) -2. 480. в) [-4; $+\infty$); е) $(-\infty; -6\frac{2}{3}]$; ж) $(-\infty; 25,2]$; з) $(-\infty; 46\frac{2}{3})$; л) $(-\infty; 3\frac{8}{11}]$; н) $[-4\frac{5}{8}; +\infty)$; п) $(2\frac{4}{11}; +\infty)$; р) $(-\infty; 1\frac{52}{59}]$. 481. б) $(-\infty; 1\frac{13}{14}]$; г) $(-\infty; -\frac{15}{16})$. 485. б) $(-\infty; -4)$; г) $(-\infty; 5)$. 487. б) $(-\infty; 6,5)$; г) $(-\infty; 1\frac{23}{43}]$; е) $(-\infty; 1\frac{7}{16}]$. 488. а) больше 8 см и меньше 12 см; б) больше 0 см и меньше 4 см; в) больше 4 км/ч; г) более 5,625 км; д) меньше или равно 8 дней; е) менее 59 мешков. 489. б) $[0; 1\frac{67}{73})$; в) $(4\frac{8}{13}; +\infty)$; г) $[0; +\infty)$. 491. а) $(-\infty; -3,4375)$; б) $(-\infty; 0,75)$; в) $[-4\frac{3}{14}; +\infty)$; г) $(-\infty; 2\frac{17}{31}]$; ж) $(-3\frac{1}{38}; +\infty)$; з) $(-\infty; -27\frac{2}{3})$. 492. б) $(3\frac{12}{37}; +\infty)$; в) $(-\infty; \frac{21}{106}]$; д) $[4\frac{4}{17}; +\infty)$; з) $(-\infty; -8\frac{2}{3}]$.

493. в) $[-9; -2\frac{2}{7}]$; г) $(-3; 7]$. 494. е) $(\frac{-c-a}{5}; +\infty)$; и) при $a > 1$: $(-\infty; \frac{ab}{1-a})$; при $a = 1, b < 0$: $(-\infty; +\infty)$; при $a = 1, b \geq 0$: $\emptyset$; при $0 < a < 1$: $(\frac{ab}{1-a}; +\infty)$; при $a < 0$: $(-\infty; \frac{ab}{1-a})$. 498. а) $33\frac{1}{3}$ раб. дня; б) 10 линий; в) 9 часов; г) 140 чел. 501. б) $-11x^3 - 5xy - 6y^3$. 503. а) 3; б) 2; в) 6; г) 7. 506. в) $(-\infty; 0,1]$; г) $[-36; +\infty)$; ж) $(-\infty; 4)$; и) $(-5; +\infty)$; м) $(-\infty; 8)$. 510. б) $(-\infty; -\frac{2}{3}]$; г) $[-1\frac{5}{6}; +\infty)$; е) $(9; +\infty)$; з) $(-\infty; 3)$. 511. в) $[5\frac{2}{3}; +\infty)$; д) $[2,75; +\infty)$. 512. б) $(-\infty; 2\frac{2}{3}]$; г) $(0,25; +\infty)$; д) $(-\infty; -2,5]$. 516. в) $(-\infty; 30]$; г) $(-\infty; -144)$; е) $(96; +\infty)$. 517. а) $(2,25; +\infty)$; б) $(-\infty; -3\frac{1}{9})$; в) $\emptyset$; г) $[-1,5; +\infty)$. 519. а) $(-\infty; 2)$; б) $(-\infty; 2,25)$; в) $(-\infty; -4\frac{1}{6}]$; г) $(-\infty; \frac{41}{67}]$. 520. а) больше 3 см и меньше 7,5 см; б) менее 45 мин; в) меньше 1786 мешков. 521. а) $(-\infty; 1\frac{16}{31})$; б) $(-\infty; \frac{17}{59})$; в) $[\frac{73}{167}; +\infty)$; г) $[-2,75; +\infty)$. 522. б) $(-\infty; 0]$. 523 а) $(-60; +\infty)$; б) $(-\infty; \frac{1}{13}]$; в) $[1\frac{27}{35}; +\infty)$; г) $(5\frac{3}{19}; +\infty)$. 524. а) $(-15; -3,2)$; б) $(2\frac{18}{41}; 27]$. 526. а) $-5a^2 - 4ab - b^2$. 527. а) 18 дней; б) 6 поваров. 530. а) 2; б) 5. 532. $[6,25; +\infty)$. 536. б) $(-7; 7)$; г) $(-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$; д) $\emptyset$; е) $(-\infty; +\infty)$; и) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. 537. а) $(-6; 4)$; в) $(-\infty; -0,6] \cup [6,6; +\infty)$; г) $(-\infty; -8,4) \cup (10,4; +\infty)$; е) $(-8\frac{1}{3}; 9)$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $(-8,4; 7,6)$; и) $\emptyset$. 540. а) $(-5; 1,5)$; в) $(-\infty; -2,5] \cup [6; +\infty)$; д) $(-\infty; -\frac{1}{6}) \cup (2,5; +\infty)$; ж) $\emptyset$; з) $\{0\}$; и) $(-\infty; +\infty)$. 541. б) $(8; +\infty)$; д) $(-\infty; 7]$; ж) $(-4,25; -\frac{1}{8})$; и) $(-\infty; 1\frac{7}{12}] \cup [4,5; +\infty)$; к) $(-\infty; -12\frac{1}{3}) \cup [-\frac{5}{11}; +\infty)$. 542. в) $[-\frac{3}{13}; 45]$; д) $[-15; -1\frac{2}{3}]$; е) $(-\infty; 1\frac{9}{11}] \cup [76; +\infty)$. 543. б) $[-16; -1,6]$; г) $(-\infty; -23) \cup (-\frac{7}{9}; +\infty)$; д) $[-21; -2\frac{1}{3}]$. 545. б) $(-2\frac{2}{3}; 10\frac{2}{3})$; г) $(-2; 7\frac{1}{3})$. 546. д) $(-\infty; 1,5)$; е) $(-\infty; 2] \cup [10; +\infty)$; к) $(-\infty; 4,5] \cup [15,5; +\infty)$; м) $(-27; \frac{3}{7})$; о) $(-\infty; 1\frac{2}{3}] \cup [15; +\infty)$; с) $(-5,5; -1\frac{1}{3})$; ф) $(-\infty; -4\frac{2}{3}) \cup (-3,5; +\infty)$. 548. б) $(-21; 9)$; г) $[3; 21]$; е) $(-\infty; -14) \cup (-4; +\infty)$; ж) $[-1; 2\frac{3}{7}]$; з) $[0; \frac{1}{3}]$. 549. б) $(-\infty; -3,1) \cup (-\frac{3}{14}; +\infty)$; в) $(-\infty; \frac{1}{3}] \cup [5,5; +\infty)$; г) $[-\frac{3}{32}; \frac{7}{8}]$; ж) $\emptyset$; з) $(-\infty; +\infty)$. 550. а) $(-3,5; 2,5)$; б) $(-\infty; 4,5)$; г) $(-\infty; 2] \cup [19; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $(-\infty; -1,25)$; з) $[5; +\infty)$. 551. а) $[0; \frac{1}{6}]$; в) $[0; +\infty)$; д) $(3; +\infty)$; е) $[1; +\infty)$. 552. б) $(-\infty; b-9] \cup [b+9; +\infty)$; г) $[\frac{-6-d}{8}; \frac{6-d}{8}]$. 553. а) $[\frac{4}{7}; 4]$; б) $(-41; 0,75)$; в) $[-1; 16]$; г) $[-7; 2\frac{4}{7}] \cup [5\frac{5}{9}; 14]$. 555. а) 629 кг; б) 2475 см; в) 46 ч; г) 12 434 р. 557. а) 40,5 км; б) 80 км/ч или 40 км/ч; в) 90 км/ч; г) 360 м. 559. в) $-6s - 10t + 22r$; г) $\frac{4}{ac}$. 560. а) 2; б) 6; в) 1. 562. в) $x_1 = -28$; $x_2 = \frac{5}{7}$; $x_3 = 8\frac{1}{13}$. 563. г) $[-20; 10]$; е) $(-\infty; -5) \cup (9; +\infty)$. 566. в) $(-\infty; 2,25) \cup (10,25; +\infty)$; г) $(-\infty; -6] \cup [-5; +\infty)$. 567. а) $(-\infty; -1,5)$; б) $\emptyset$; в) $(-\infty; 11,5]$; г) $(3,5; +\infty)$; д) $[-8,25; -0,9]$; е) $(-\infty; -0,4) \cup (2\frac{12}{17}; +\infty)$; з) $(-\infty; +\infty)$. 568. в) $(-\infty; -39] \cup [-1\frac{2}{7}; +\infty)$; г) $[4\frac{3}{11}; 26\frac{1}{3}]$; д) $(-7; -0,2)$; е) $(-\infty; -\frac{6}{7}) \cup (28; +\infty)$. 569. в) $(-9,5; -3)$; г) $(2,5; 12,5)$. 570. в) $(-\infty; 0,5] \cup [4,5; +\infty)$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $(-\infty; -1,2) \cup (1,6; +\infty)$; з) $(-\infty; \frac{11}{13}) \cup (7; +\infty)$; к) $\emptyset$; м) $(-\infty; +\infty)$. 572. а) $(-2; 8)$; б) $(-12; 2\frac{2}{3})$; в) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-\infty; -7\frac{2}{3}) \cup (-1\frac{2}{9}; +\infty)$; е) $\emptyset$. 573. б) $(-\infty; -54] \cup [1\frac{7}{11}; +\infty)$; в) $[-6; -3] \cup [6\frac{1}{3}; 8]$; г) $(-\infty; -2\frac{5}{6}) \cup [-1\frac{3}{8}; +\infty)$. 574. а) $(-8; 7)$; б) $(-\infty; +\infty)$; в) $[-4,5; +\infty)$; г) $(-\infty; -0,5)$. 575. а) $[-1,4; 0]$; б) $(-\infty; 0]$. 576. а) $[-4; 1)$; б) $[-\frac{3}{8}; 10,5]$. 577. а) 1909 кг; б) 14 109 см; в) 87 ч.; г) 57 141,3 р. 579. а) 27 км; б) 30 км/ч; в) 300 м. 581. в) $8p + 26r - 14t + s$; г) $-\frac{1}{2m}$. 582. а) 3; б) 1; в) 4. 584. б) $x_1 = 1,2$; $x_2 = -\frac{8}{15}$; $x_3 = \frac{20}{21}$.

585. $[-2; -1]$. 586. 13 рядов, 145 шк. 587. 28; 56; 84. 588. б) $(-\infty; +\infty)$; в) $\{1, 1\}$; г) $\{2\frac{1}{3}\}$; ж) $\{-3\}$; и) $\{3, 5\}$; к) $\{2\frac{4}{23}\}$; л) $\{0\}$. 589. в) $\{-1; 8\}$; г) $\{0, 5\}$; д) $\{-2\}$; е) $\emptyset$; ж) $\{-5; -0, 8\}$; з) $\{\frac{1}{7}; 1\frac{6}{11}\}$. 591. б) $\emptyset$; г) $\{6\}$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $\{3\frac{1}{3}\}$; к) $\{-3\}$; л) $\emptyset$; м) $\{-1\}$. 592. а) 7А – 26 чел.; 7Б – 21 чел.; 7В – 29 чел.; б) в I – 15, во II – 30, в III – 28, в IV – 18; в) 1,5 и 10,5 или $-1,5$ и $-10,5$; г) 4 и 8 или -4 и -8 . 593. б) $2\frac{2}{3}$; е) 4; и) $\{-9, 5; -\frac{1}{8}\}$; к) $\{-3\frac{6}{7}; 0, 6\}$; л) $\{-12; 0, 6\}$. 595. а) $\{-1; 13\}$; в) $\{-8\}$; г) $\emptyset$; д) $\{1, 5; 3\}$; е) $(-\infty; +\infty)$; з) $\{-3; -1; 13\}$; и) $\{8; 10\}$; к) $\{-3; 15\}$; м) $\{1, 8; 2, 5\}$. 600. г) $[-3\frac{1}{3}; +\infty)$; ж) $(-\infty; 6\frac{2}{3}]$; з) $(1, 6; +\infty)$; м) $(1\frac{1}{3}; +\infty)$. 601. в) $(-\infty; -63)$; д) $(3\frac{5}{19}; +\infty)$; ж) $(-\infty; -2\frac{3}{11}]$. 604. г) $[-2; -\frac{1}{3}]$; е) $(-\infty; 0] \cup [\frac{2}{3}; +\infty)$; ж) $(-\infty; -2)$; з) $[-23; \frac{1}{3}]$; и) $(-\infty; +\infty)$; к) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; л) $(-4; 18)$; м) $(-\infty; \frac{1}{8}] \cup [8, 5; +\infty)$. 605. г) $(-\infty; \frac{2}{3})$; ж) $(5, 4; +\infty)$; з) $(-\infty; -19) \cup (-5; +\infty)$; к) $(-\infty; 0, 5] \cup [7; +\infty)$. 606. а) больше 12 см и меньше 21 см; б) не более 400 Мб. 607. а) коньков в 1,1 раза; б) ум. на 16%; в) ум. на 1%. 608. а) 3,75 раб. дня; б) 10 часов 40 мин; в) 15 км/ч; г) 350 м. 609. б) $\{-3\frac{2}{3}\}$; г) $\{-2\frac{2}{3}\}$. 610. в) при $a \neq 0, 5$: $x = \frac{ab}{2a - 1}$, при $a = 0, 5$ и $b = 0$: $x \in (-\infty; +\infty)$, при $a = 0, 5$ и $b \neq 0$: $\emptyset$. 611. а) $(-\infty; 11)$; б) $(-\infty; -\frac{2}{3})$; в) $(-6, 5; 10)$; г) $[6; +\infty)$. 612. б) $[-37; -\frac{12}{13}]$; в) $(-\frac{2}{3}; 3]$; г) $(-5\frac{5}{7}; 2)$. 613. а) 30; б) $40n + 37$, $n \in \mathbb{Z}$. 614. (3; 7), (8; 5), (13; 3), (18; 1). 616. а) 60; б) 135; в) 720; г) 120. 617. а) 315; б) 672; в) 1620; г) 40 320. 618. а) 8; б) 36; в) 2160; г) 72; д) 48. 620. а) 20 160; б) 60; в) 360. 623. д) 1) 10; 2) 20; 3) 17; е) 1) 15; 2) 4; 3) 12. 625. а) 12 км/ч, $\approx 11, 7$ км/ч; б) 12 сут. 9 ч; в) 3 ч; г) 4 ч. 626. ж) $\frac{1}{(x + 3y)^2}$; з) $4a - 1$; и) $\frac{(c + 5d)^2}{c - 5d}$. 627. а) 2; б) 4; в) 3; г) 6. 629. а) 24 ч; б) 19 км/ч. 630. а) 40; б) 24. 631. а) 54; б) 84; в) 720. 632. а) 4; б) 4320; в) 6. 634. а) 120; б) 360. 636. б) 1) 11; 2) 12; 3) 4; в) 1) 7; 2) 2; 3) 8. 638. а) 18 км/ч, $\approx 17, 78$ км/ч; б) 8 суток. 639. в) $\frac{5p + 7q}{5p - 7q}$; г) $\frac{9p^2 - 12pq + 4q^2}{3p - 4q}$; д) $\frac{1}{(5x + y)^2}$; е) $2a - 1$. 640. а) 2; б) 3; в) 4; г) 5. 642. $\{-74, 5; -42, 5\}$. 643. 53 мяча. 646. а) 216; б) 4^6 ; в) 2^9 ; г) 2^6 . 647. а) 1364; б) 2800; в) 1 111 110; г) 837 930. 648. а) 7812; в) 18 278 000; г) 1296. 653. а) шеф-повар – 11 500 р; повар – 8050 р; помощник – 1840 р; б) 124 250 р; в) 28 га 25 а 34 м²; г) 1:6000. 654. ж) $\frac{5y}{xz}$; з) $\frac{4ac}{3b}$; и) $\frac{10}{3mpk}$. 658. а) 64; б) 81. 659. а) 9330; б) 11 111 110. 660. а) 216; б) 3 637 248. 664. а) 622,6 тыс. р.; б) 18 га 14 а 40 м². 665. д) $6xyz$; е) $\frac{5a}{3bc}$. 669. $(-60, 5; -33, 5)$. 670. I – 24 ор.; II – 12 ор. 671. 290 г. 680. а) в А на 132 р. 11 коп.; б) 100 000 р; в) 148,832%; г) 1) 2500 р.; 2) 6000 р.; 3) 10 990 р.; 4) 17 280 р. 682. в) $9a - 2b$; г) $6m - 11n$. 684. а) -15 ; б) -28 ; в) 4; г) $-0, 1$. 691. а) 50000 р.; б) 1) 4200 р.; 2) 6300 р.; 3) 10 850 р.; 4) 17 808 р. 693. а) $12a - b$; б) $6n - 2m$. 695. а) 2; б) 10. 696. $(-\infty; 3, 5)$. 698. 21 ириска и 29 шоколадных. 699. а) 36,6; б) $\approx 57, 2$; в) $\approx 89, 6$; г) $\approx 43, 5$. 707. а) $(-\infty; -\frac{19}{23})$; б) $(\frac{3}{11}; +\infty)$; в) $(-\infty; -16]$; г) $[14, 5; +\infty)$. 708. а) 3 и 14, 12 и 5; б) 95° . 719. а) $(-\infty; -3, 4)$; б) $(-\frac{26}{29}; +\infty)$; в) $(-\infty; 2\frac{3}{13}]$; г) $[10; +\infty)$. 720. а) 7 и 31, 18 и 20, 29 и 9; б) 100° . 725. $\emptyset$. 726. 66. 727. 9000 р. 738. а) 25 км; б) $33\frac{1}{3}\%$; в) 13 180 р.; г) ум. на 5,75%. 741. б) $-3x^2y - 3xy^2 - y^3$. 742. а) $\{-3; \frac{1}{3}\}$; б) $\{-5, 25; 4\}$; в) $\{-12; 4\}$; г) $\{-13; -6\}$. 744. а) 94,375%; б) 35 кг; в) 21 кг. 746. а) 500; б) 1900. 751. а) 750 м; б) 36 700 р.; в) ум. на 7,6 %. 754. а) $4a^2 - 3b^2$;

- б) $-2p^3 - 3p^2q + 3pq^2$. 755. а) $\{-5; 6, 4\}$; б) $\{2; 2, 5\}$; в) $\{7; 9\}$; г) $\{-11; 4\}$. 756. а) 80%; б) 40 кг. 757. $\{3\frac{7}{15}; 11, 6\}$. 758. 46 лет. 761. а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{6}$; 762. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{5}{12}$; в) $\frac{5}{9}$; г) $\frac{1}{18}$; д) $\frac{1}{18}$. 763. а) 1) 0,8; 2) 0,2; б) 1) $\frac{3}{11}$; 2) $\frac{2}{11}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{51}$; д) $\frac{2}{15}$. 764. а) 0,1; б) 0,2; в) 0,04; г) 0,25. 765. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{20}$; в) 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$. 766. а) 1) 0,1; 2) $\frac{8}{45}$; б) 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{24}$. 767. а) $\frac{5}{8}$; б) 0,5; в) $\frac{7}{60}$; г) $\frac{1}{78}$. 770. 420 шт. 772. а) 15 км/ч; б) 70 км/ч; в) 80 км/ч; г) 105 км/ч. 775. на мотоцикле; 776. а) 1; б) 3; в) 9; г) 7. 777. а) $\{9\}$; б) $\{0; 6\}$; в) $\{-11\}$; г) $\{-9; 0\}$. 778. а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{5}{36}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $\frac{1}{3}$; е) $\frac{1}{18}$. 779. а) 1) $\frac{8}{11}$; 2) $\frac{5}{33}$; б) $\frac{13}{15}$. 780. а) 0,14; б) 0,05. 781. б) 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$. 782. а) 1) 0,01; 2) $\frac{13}{450}$; б) $\frac{1}{120}$. 783. а) $\frac{3}{4}$; б) 0,4; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{7}{6844}$. 785. 84 шт. 787. а) 2 км/ч; б) 50 км/ч; в) 5 км/ч. 790. а) $\{5\}$; б) $\{0; 4\}$. 791. а) 3; б) 1. 792. (1; 11). 794. 1 раз. 795. а) 24; б) 120. 796. а) 136; в) 720. 797. а) 210; б) 693. 798. а) 576; б) 96. 799. а) 6^4 ; б) 4^6 . 800. б) 11 110. 808. а) $\frac{1}{18}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{7}{12}$; г) $\frac{1}{4}$. 809. а) 2) $\frac{3}{11}$; б) $\frac{51}{53}$. 810. а) 0,11; б) 0,08; в) 0,05; г) 0,03. 812. б) 68,4 ч.; в) 44 100 р.; г) 6 га 45 а 12 м²; д) в А на 9327,36 р.; е) 85 000 р.; ж) 6075 р.; з) ум. на 41,2%. 815. а) 60 480; б) 15 120. 816. а) 2343; в) 33 824 000. 818. а) $\frac{5}{16}$; б) $\frac{1}{560}$. 819. в) -1,5; е) 0,09; з) 3; к) 2,5. 820. а) 68 000; б) 400; г) 95 000; д) 90; е) 10; ж) 6; з) 0,5; к) 1; л) 0; м) $\frac{6}{145}$. 821. б) 140° ; в) 243,7 тыс.р.; г) 259 кг. 835. а) 8 часов 20 мин; б) $3\frac{1}{13}$ ч.; в) $1\frac{11}{13}$ ч.; г) 14,4 ч; д) в 15 раз. 836. а) 15 200 кг; б) 23 400 мм; в) 1328 мин. 841. а) 1; б) 96; в) 4; г) 14. 846. а) 5600 тыс. р.; б) 20 кг; в) $\frac{7}{175}$; г) 4 ч 40 мин. 847. а) 400 стр.; б) 375 кор., 210 кор.; в) 30%; г) ум. на 52,75%. 848. а) $\{-4\}$; б) $\emptyset$; в) $\{3\}$; г) $\{\frac{1}{11}\}$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\{1,75\}$; ж) $\{-0,3\}$; з) $\{-9\frac{1}{3}\}$; и) $\{-4,6\}$; к) $\{1\}$. 849. а) $\{60\}$; б) $\{-1\frac{5}{9}\}$; в) $\{2,25\}$; г) $\{7\}$; д) $\{1,4\}$; е) $\{-0,5\}$. 850. б) 52; в) 4 : 11; г) 2 : 3. 862. а) 14 км/ч, $\approx 13,71$ км/ч; б) 7 ч.; в) 8 ч.; г) 4,55 км. 863. в) $143\frac{63}{64}$; г) 13 200; д) $1\frac{8}{77}$; е) 10 000; ж) 6400; з) 0,5; и) -3596; к) 1000. 864. а) $\{3\}$; б) $\{-4; 1\frac{1}{3}\}$; в) $\{-7\frac{1}{3}\}$; г) $\{1,5\}$; д) $\{111\}$; е) $\{-4\}$; ж) $\{-2\}$; з) $\{-2; 0; 1\}$; и) $\{-2\frac{2}{3}\}$; з) $\{-1,5\}$. 865. а) $\{-13; 5\}$; г) $\{-2; 5\frac{1}{3}\}$; д) $\emptyset$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $\{-2; 10\}$; з) $\{-4\}$; и) $\{0\}$. 866. а) $\{-5; 3\}$; б) $\{5; 7\}$; в) $\{-8; -3\}$; г) $\emptyset$. 867. а) 28 м; б) 64 см. 870. а) $(-\infty; -20]$; б) $(\frac{1}{14}; +\infty)$; в) $(-\infty; 4)$; г) $[-5; +\infty)$; д) $\emptyset$; е) $(-\infty; +\infty)$; ж) $(-\infty; -2)$; з) $(-\infty; +\infty)$; и) $(-\infty; \frac{4}{9})$; к) $(-\infty; -1\frac{7}{11}]$; л) $[1; +\infty)$; м) $(-\infty; 2\frac{3}{17})$. 871. а) $(18; +\infty)$; б) $(-\infty; -42]$; в) $(-\infty; 36]$; г) $(-2\frac{6}{7}; +\infty)$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $\emptyset$. 872. а) $(-14; 4)$; б) $(-\infty; 2] \cup [5; +\infty)$; в) $\emptyset$; г) $(-\infty; +\infty)$; д) $(-32; -\frac{8}{9})$; е) $(-\infty; -1\frac{1}{3}]$. 873. а) 6 ч. 10 мин.; б) 70 км/ч или 30 км/ч; в) 10 км/ч; г) 83 км/ч. 874. а) 2; б) 216; в) 10; г) -1; д) 1; е) 343; ж) 130; з) 214; и) -19,5; к) 27. 898. а) 720; б) 96; в) 5040; г) 216; д) 2880; е) 48. 899. а) 243; б) 625; г) 5460. 904. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{5}{6}$. 905. а) $\frac{7}{33}$; б) $\frac{29}{32}$; в) $\frac{2}{125}$. 906. (3; 23), (12; 14), (21; 5). 913. а) 1; б) 0. 914. а) 9; б) 3; в) 1; г) 8. 916. а) $C(4, 5)$; б) $C(0)$ или $C(-36)$; в) $C(9)$ или $C(45)$; г) $C(15)$ или $C(21\frac{6}{7})$. 917. а) 13,75 т.; б) 1758 кг. 926. а) 40,25; б) 308,25. 928. а) -9; б) 3. 929. а) -92; б) 4. 930. а) -1; б) 1. 933. а) $\{0, 6\}$; б) $\{-15, 75\}$. 934. а) $\{-11\frac{2}{3}; 1\}$; б) $\emptyset$; в) $\{-3, 75; -2, 25; -1\frac{5}{6}; 14, 75\}$. 935. а) 26; б) $33n + 20, n \in \mathbb{Z}$. 936. (11; 2) и (4; 5). 937. а) $(-\infty; 0, 5)$; б) $[15; +\infty)$. 938. а) $[0, 5; 6, 375]$; б) $(-\infty; -4] \cup [7; +\infty)$. 939. а) 360; б) 312; в) 12 098 790.

Предметный указатель

Абсцисса	стр. 13	Медиана набора чисел	стр. 159
Аргумент	стр. 11	Мода набора чисел	стр. 158
Величины:		Наибольшее значение	стр. 157
зависимые	стр. 3	Наименьшее значение	стр. 157
независимые	стр. 3	Неравенство	стр. 98
переменные	стр. 3	строгое	стр. 98
прямо пропорциональные	стр. 27	нестрогое	стр. 98
Вероятность случайного события ...	стр. 169	Ордината	стр. 13
График функции	стр. 13	Отрезок	стр. 47
Диофантовы уравнения	стр. 88	Полуинтервал	стр. 47
Задание функции:		Прямая пропорциональность	стр. 27
аналитически	стр. 12	Равенство	стр. 63
графически	стр. 12–13	Равносильные неравенства	стр. 99
словесным описанием	стр. 11	Равносильные уравнения	стр. 63
таблицей	стр. 12	Размах набора чисел	стр. 157
Интервал	стр. 47	Решения неравенства	стр. 98
Испытание	стр. 168	События:	
Исход	стр. 168	детерминированные	стр. 168
благоприятный	стр. 168	достоверные	стр. 177
Классическая схема определения		невозможные	стр. 177
вероятности	стр. 176	равновозможные	стр. 169
Ключ шифра	стр. 20	случайные	стр. 168
Комбинаторика	стр. 129	Среднее арифметическое	стр. 156
Корень уравнения	стр. 63	Статистика	стр. 156
Коэффициент пропорциональности ..	стр. 27	Теория вероятностей	стр. 168
Криптография	стр. 20	Тождество	стр. 63
Кусочно-линейная функция ...	стр. 47–48	Уравнение	стр. 63
Линейная зависимость	стр. 36	Функция	стр. 4
Линейная функция	стр. 36	Частота случайного события	стр. 168
Линейное неравенство	стр. 100	Числовой промежуток	стр. 47
Линейное уравнение	стр. 64	Шифр:	
Луч:		замены	стр. 21
замкнутый	стр. 47	перестановки	стр. 22
открытый	стр. 47	сдвига	стр. 20

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ДО 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997		

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДО 100

1²	1	21²	441	41²	1681	61²	3721	81²	6561
2²	4	22²	484	42²	1764	62²	3844	82²	6724
3²	9	23²	529	43²	1849	63²	3969	83²	6889
4²	16	24²	576	44²	1936	64²	4096	84²	7056
5²	25	25²	625	45²	2025	65²	4225	85²	7225
6²	36	26²	676	46²	2116	66²	4356	86²	7396
7²	49	27²	729	47²	2209	67²	4489	87²	7569
8²	64	28²	784	48²	2304	68²	4624	88²	7744
9²	81	29²	841	49²	2401	69²	4761	89²	7921
10²	100	30²	900	50²	2500	70²	4900	90²	8100
11²	121	31²	961	51²	2601	71²	5041	91²	8281
12²	144	32²	1024	52²	2704	72²	5184	92²	8464
13²	169	33²	1089	53²	2809	73²	5329	93²	8649
14²	196	34²	1156	54²	2916	74²	5476	94²	8836
15²	225	35²	1225	55²	3025	75²	5625	95²	9025
16²	256	36²	1296	56²	3136	76²	5776	96²	9216
17²	289	37²	1369	57²	3249	77²	5929	97²	9409
18²	324	38²	1444	58²	3364	78²	6084	98²	9604
19²	361	39²	1521	59²	3481	79²	6241	99²	9801
20²	400	40²	1600	60²	3600	80²	6400	100²	10000

**ТАБЛИЦА КУБОВ
НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДО 60**

1³	1	21³	9261	41³	68 921
2³	8	22³	10 648	42³	74 088
3³	27	23³	12 167	43³	79 507
4³	64	24³	13 824	44³	85 184
5³	125	25³	15 625	45³	91 125
6³	216	26³	17 576	46³	97 336
7³	343	27³	19 683	47³	103 823
8³	512	28³	21 952	48³	110 592
9³	729	29³	24 389	49³	117 649
10³	1000	30³	27 000	50³	125 000
11³	1331	31³	29 791	51³	132 651
12³	1728	32³	32 768	52³	140 608
13³	2197	33³	35 937	53³	148 877
14³	2744	34³	39 304	54³	157 464
15³	3375	35³	42 875	55³	166 375
16³	4096	36³	46 656	56³	175 616
17³	4913	37³	50 653	57³	185 193
18³	5832	38³	54 872	58³	195 112
19³	6859	39³	59 319	59³	205 379
20³	8000	40³	64 000	60³	216 000

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ — формула квадрата суммы}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ — формула квадрата разности}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \text{ — формула разности квадратов}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ — формула куба суммы}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ — формула куба разности}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \text{ — формула суммы кубов}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ — формула разности кубов}$$

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВИДА: $y = kx + b$

Значение k	Значение b	Корень уравнения
$k \neq 0$	b — любое число	$-\frac{b}{k}$
$k = 0$	$b \neq 0$	Нет корней
$k = 0$	$b = 0$	Корень — любое число

РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Значение k	Значение c	Решения неравенства $kx > c$	Решения неравенства $kx \geq c$	Решения неравенства $kx < c$	Решения неравенства $kx \leq c$
$k = 0$	$c < 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$ (Нет решений)	$\emptyset$ (Нет решений)
$k = 0$	$c = 0$	$\emptyset$ (Нет решений)	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$ (Нет решений)	$(-\infty; +\infty)$
$k = 0$	$c > 0$	$\emptyset$ (Нет решений)	$\emptyset$ (Нет решений)	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$k > 0$	c — любое	$(\frac{c}{k}; +\infty)$	$[\frac{c}{k}; +\infty)$	$(-\infty; \frac{c}{k})$	$(-\infty; \frac{c}{k}]$
$k < 0$	c — любое	$(-\infty; \frac{c}{k})$	$(-\infty; \frac{c}{k}]$	$(\frac{c}{k}; +\infty)$	$[\frac{c}{k}; +\infty)$

Оглавление

Глава 5. Введение в теорию функций	3
§ 1. Понятие функции и ее практическое применение	3
5.1.1. Функциональная зависимость между величинами	3
5.1.2. Способы задания функции	11
5.1.3. Функциональная зависимость и кодирование информации	20
§ 2. Линейные процессы и линейная функция	27
5.2.1. Прямая пропорциональность	27
5.2.2. Линейная функция и ее график	36
5.2.3. Кусочно-линейные функции	46
Задачи для самоконтроля к Главе 5	59
Глава 6. Введение в теорию линейных уравнений и неравенств	63
§ 1. Линейные уравнения	63
6.1.1. Линейные уравнения и их решение	63
6.1.2. Решение уравнений с модулями	76
6.1.3. Решение линейных уравнений в целых числах	88
§ 2. Линейные неравенства	98
6.2.1. Линейные неравенства и их решение	98
6.2.2. Линейные неравенства с модулями	114
Задачи для самоконтроля к Главе 6	124
Глава 7. Введение в комбинаторику, теорию вероятностей и статистику	129
§ 1. Элементы комбинаторики	129
7.1.1. Задача подсчета числа вариантов	129
7.1.2. Комбинации с повторениями	137
§ 2. Сбор и анализ информации	144
7.2.1. Способы упорядочивания информации	144
7.2.2. Статистические характеристики	156
§ 3. Элементы теории вероятностей	168
7.3.1. Частота и вероятность случайных событий	168
7.3.2. Классическая схема определения вероятности	176
Задачи для самоконтроля к Главе 7	184
Задачи для самоконтроля по курсу 7 класса	190
Ответы	206
Предметный указатель	211
Приложения:	
Таблица простых чисел	212
Таблица квадратов натуральных чисел до 100	213
Таблица кубов натуральных чисел до 60	214
Справочная информация	215

Петерсон Людмила Георгиевна
Абрамов Дмитрий Леонардович
Чуткова Елена Валериевна

МАТЕМАТИКА
Алгебра. Функции. Анализ данных
Учебник для 7 класса
Часть 3

Ответственный за выпуск *Ю. И. Веслинский*
Художники *С. Ю. Гаврилова, П. А. Северцов*
Художественный редактор *Т. С. Шаляпина*
Технический редактор *Е. В. Безугова*
Компьютерная верстка *Р. Ю. Шаповалов*
Корректор *О. Б. Андрюхина*

одписано в печать 11.04.2011. Формат 84х108/16. Объем 13,5 печ. л. 22,68 усл. печ. л.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Школьная.
Тираж 25 000 экз. Заказ № 28564 (К-8м).

Издательство «Ювента»
(структурное подразделение ООО «С-инфо»)

125284 Москва, а/я 42 Тел.: (495) 796-92-93 Факс: (495) 796-92-99
E-mail: booksale@si.ru Адрес в Интернете: www.books.si.ru

Приобрести книги можно в магазине по адресу:

Москва, ул. 1905 года, д. 10 А. Телефон: (499) 253-93-23

Часы работы: с 10 до 19 часов. Выходные: воскресенье, понедельник

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат»,
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.